

СЕНТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

2021 · № 9

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# Неисчерпаемый



С танграма начался мой интерес к математике, тогда мне было 8 лет. Родители подарили мне плоскую коробочку, в которой был пластмассовый квадрат, сложенный из семи простых геометрических фигур разного размера. Из этих частей можно было собирать фигуры сложной формы. Было удивительно, что даже собрать фигурки обратно в коробку, не пользуясь подсказкой, – задача трудная для новичка. Эта, казалось бы, незатейливая игра надолго завладела моим воображением, развив в итоге пространственное мышление.

История игры уходит в глубь веков. Легенда гласит, что китайский император был удручен нежеланием своего сына учиться. Тогда он собрал мудрецов и дал им задание – придумать игру, которая будет весьма занимательной и при этом очень полезной для развития. И тогда придумали танграм.

Поразительно, что всего из семи простых частей можно собрать тысячи красивых фигур, как геометрических, так и похожих на предметы и животных. Первая цель игры – по контуру фигуры восстановить возможное расположение частей. Для начинающих лучше рисовать контуры фигур в натуральную величину, чтобы можно было внутри них укладывать части. Вторая цель игры более творческая – составить из всех частей фигуру с заданными свойствами, например: шестиугольник, ракету, верблюда. Следующая цель – научиться зарисовывать придуманные фигуры на бумаге в клетку. Это, кстати, не так уж просто.

Если у вас нет танграма, то набор элементов для него легко изготовить самому из картона или из фанеры, но лучше, конечно, купить качественный деревянный – сейчас это легко сделать через интернет. На сегодня в продаже появилось множество похожих на танграм игр, но ни одна из них не сравнится с ним по совокупности заложенных идей, которые мы обсудим далее.

*(Продолжение см. на с. 22)*

*А.Ковальджи*

# КВАНТ

СЕНТЯБРЬ 2021

№9

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Время жизни шипучей таблетки в стакане  
воды. *А.Митрофанов*  
9 Изобретая логарифмическую линейку.  
*В.Клепцын*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 8 Задачи 1–4

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 13 К 130-летию И.М.Виноградова

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М2666–М2669, Ф2673–Ф2676  
17 Решения задач М2654–М2657, Ф2661–Ф2664

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

- 22 Неисчерпаемый танграм

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи  
24 Что такое шпунтик? *С.Дворянинов*  
25 В поисках оптимальных построений (из мемуаров  
*барона Мюнхгаузена*). *Г.Филипповский*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Фазовые диаграммы колебательных систем.  
*Ф.Белов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Посмотрим на чертеж с разных сторон

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 40 Апельсины, канализационные люки и  
разрезание длинного прямоугольника. *А.Акопян*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 43 Загадка плоского стекла. *Л.Ашкинази*

ОЛИМПИАДЫ

- 46 Избранные задачи XXVI Турнира  
имени А.П.Савина

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 48 ЕГЭ по физике  
54 Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова. Физика  
56 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (21, 39)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Митрофанова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Время жизни шипучей таблетки в стакане воды

А.МИТРОФАНОВ

**З**А ПОСЛЕДНЕЕ ВРЕМЯ У ЧАСТИ населения возрос интерес к медицинской физике, фармакологии, проблемам здравоохранения и тому подобное. И это не от хорошей жизни. Защитные медицинские маски и перчатки, поголовное измерение температуры у сотрудников на проходных предприятий, сигналы машин скорой помощи и сводки о числе заболевших, авральная, героическая работа медиков и реальные потери людей повлияли на образ жизни, мысли населения и отношение его к медицине и медицинским наукам. Обычные люди (по крайней мере, некоторые мои друзья и знакомые), совсем не врачи, стали задумываться и интересоваться, что же такое антитела, вакцины, вязкость крови, тромбы, антиагреганты (к которым относятся слабые водные растворы ацетилсалициловой кислоты, т.е. аспирина), антикоагулянты (гепарин и др.) и так далее, т.е. темами и понятиями, которые обычно изучают студенты-медики.

В этой статье мы поговорим и поразмышляем (с точки зрения любителя физики) о свойствах таблеток шипучего аспирина и подробнее – о реакции питьевой соды с лимонной кислотой в воде. Именно этот процесс очень часто используется в медицине для транспорта назначенного лекарства к больному органу. Хотелось бы адресовать эту статью не только ценителям безалкогольных шипучих напитков, но и тем бедолагам-больным, которые дома или на больничной койке принимали таблетки шипучего аспирина, чтобы притупить боль или просто временно облегчить свои страдания от болезни.

## Часть 1

*Англичанин мистер Хопп  
Смотрит в длинный телескоп.  
Видит горы и леса,  
Облака и небеса.  
Но не видит ничего,  
Что под носом у него.*

Даниил Хармс

Мистер Хопп по-своему прав: удаленные предметы лучше рассматривать в телескоп, бинокль или подзорную трубу. А для наблюдения других объектов существуют другие приборы, например микроскопы. Об окружающем мире можно многое узнать с помощью различных наблюдений и опытов, используя часто простейшие измерительные приборы, такие как весы, линейка, часы или даже обычный градусник. Не говоря уж о доступных в наше время «продвинутых» средствах измерений – GPS-навигаторов, лазерных уровней и дальномеров, ультразвуковых измерителей толщины и эхолотов, различных «умных» датчиков, сенсорных устройствах и так далее.

Мы же попробуем кое-что понять о природе нашего мира (на уровне атомных размеров) из простейших исследований, а именно, из наблюдений, как растворяется таблетка лекарства в стакане воды. К примеру, выясним, как время растворения в воде лекарства – таблетки шипучего аспирина с витамином С – зависит от температуры воды в стакане, и посмотрим, что интересного и поучительного следует из результатов наших нехитрых опытов.

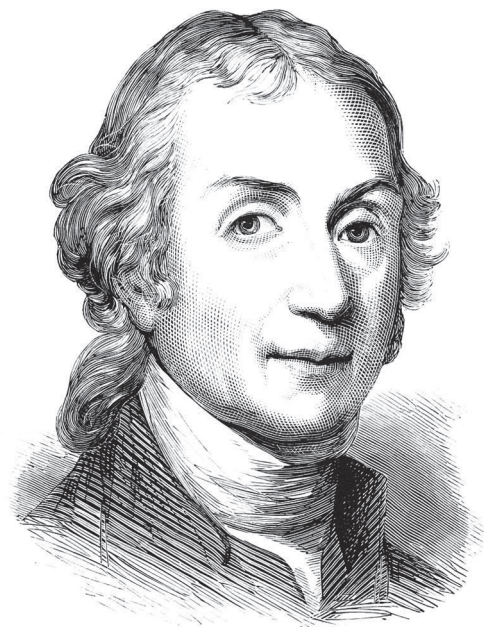
Вы, конечно, замечали, что в теплой воде легче мыть посуду, чем в холодной. И что многие химические реакции или процессы (и не только химические) идут быстрее, когда происходят при более высокой температуре. Лекарства и противови-

русные вакцины часто хранят в холодильнике, чтобы они на холоде медленнее «старелись». Если стаканчик с уже разведенным эпоксидным клеем поместить в сосуд с жидким азотом, то клей быстро не полимеризуется, он замерзнет, но долго будет сохранять свои функциональные свойства, если потом его вытащить из азота и разморозить. С этим хорошо знакомы некоторые бережливые физики-экспериментаторы и их лаборанты.

Кто-то скажет, что это же очевидно. При нагревании веществ скорости молекул или атомов увеличиваются, частицы, которые взаимодействуют друг с другом, чаще сталкиваются и реакции идут быстрее. В действительности все происходит намного сложнее и интереснее. Температурная зависимость скорости процессов совсем (кардинально) другая! И разобраться в этом вопросе нам поможет изучение одной химической реакции, вернее – прямые измерения зависимости ее скорости от температуры среды.

Рассмотрим химическую реакцию растворения в воде лимонной кислоты ( $C_6H_8O_7$ ) и питьевой соды (гидрокарбонат натрия  $NaHCO_3$ ). Судя по сообщениям из интернета, это самая любимая реакция у школьников, знатоков химии. Именно с ее помощью удастся получать простым способом газированный напиток, похожий на лимонад. В сети представлено великое множество рецептов и опытов с лимонной кислотой и питьевой содой, порой очень забавных и поучительных. Для приготовления стакана шипучки (газировки) надо смешать примерно половину чайной ложки лимонной кислоты и чуть меньше половины чайной ложки питьевой соды, залить смесь водой, не забыв добавить и растворить немного сахарного песка или фруктового сиропа для вкуса.

К месту сказать, что отцом современной индустрии безалкогольных напитков принято считать протестантского священника, философа, большого любителя химии и ученого по призванию Джозефа Пристли (1733–1804). Рядом с Лидсом (Англия), где он жил и служил пастором, находился пивоваренный завод, откуда Пристли по-



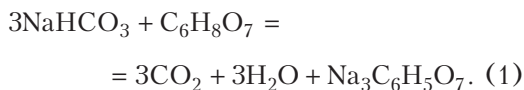
*Джозеф Пристли*

лучал для своих любительских опытов углекислый газ в нужных ему количествах (этот газ образовывался от брожения пивного сусла в бочках). Наблюдательный священник-химик заметил, что если собирать углекислый газ над водой, то часть газа растворяется в жидкости, что придает ей приятный терпкий привкус. Таким образом Пристли получил (и первым закупорил в бутылку) напиток типа сельтерской или содовой воды. А в истории науки он более известен как ученый, открывший кислород (независимо это открытие сделал шведский химик Карл Вильгельм Шееле, 1742–1786). Пристли открыл также или впервые получил и изучал такие газы, как закись азота, хлористый водород, аммиак, фтористый кремний, диоксид серы и окись углерода. Его работы с газами немало способствовали развитию химической науки. Позднее Джозеф Пристли написал монографию «История учения об электричестве» – труд, за который он был избран почетным членом ряда академий, в том числе Петербургской Академии наук (1780).

Но вернемся к газировке. Конечно, Пристли вряд ли догадывался, какую важную

роль будут играть потом в жизни людей шипучие газированные напитки. И не мог предвидеть, что 24 апреля даже празднуется Всемирный день газировки. Как сказал один астроном, «открытие нового кулинарного рецепта для человечества бывает порой более важным, чем обнаружение на небе новой звезды».

Химическое уравнение реакции питьевой соды с лимонной кислотой в воде записывается так:



В реакции образуется цитрат натрия, углекислый газ и вода. Цитрат натрия ( $\text{Na}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7$ ) применяется как вкусовая добавка (Е331) в составе газированных напитков и в других продуктах, а также как одна из необходимых составляющих при переливании крови – для предотвращения свертывания донорской крови и ее компонентов.

Когда сухая таблетка опускается в воду, реакция идет достаточно быстро с образованием волшебных пузырьков газа на поверхности таблетки и стакана, которые, всплывая, к тому же шипят, покидая водную поверхность. Часть углекислого газа успевает раствориться в воде. Активная зона реакции находится на поверхности таблетки, именно там рождаются пузырьки углекислого газа. Когда таблетка растворится полностью, выделение пузырьков почти совсем прекращается.

Свойство вещества препятствовать свертыванию крови бывает иногда крайне важным в медицине при лечении тяжелых недугов (например, когда происходит образование сгустков тромбов в мелких сосудах легких при коронавирусной инфекции или в других случаях). Реакция питьевой соды с лимонной кислотой часто используется фармацевтами и химиками-технологами в шипучих таблетках для транспорта разных лекарственных препаратов с водой к пациенту, в том числе антиагрегантов и антикоагулянтов. Лекарственный порошок, растворимый в воде (микрорекристаллы витамина С и др.), и водонерастворимый или слабо раство-

римый порошок (например, аспирин) прессуются в единую таблетку с питьевой содой и лимонной кислотой (и некоторыми другими добавками). Такие таблетки помещают в легкую герметичную для воды и ее паров многослойную бумажно-полимерную упаковку (иногда алюминизированную с внутренней стороны), защищающую спрессованную смесь порошка от воздействия атмосферной влаги, случайных капель воды и яркого света.

Если вскрыть упаковку и бросить таблетку в стакан с водой, то за короткое время получается раствор или взвесь лекарства в слабо газированном напитке. Так устроены многие шипучие препараты лекарств, например шипучий аспирин-С фирмы Bayer или хорошо известное лекарство АЦЦ Лонг в форме таблеток, применяемых при заболевании органов дыхания. Аналогично устроены таблетки для быстрого приготовления безалкогольных шипучих тонизирующих напитков (энерготоников), витаминов и так далее. Часто в рецептуре шипучих лекарств лимонная кислота и питьевая сода даже не указываются, так как эти вещества и продукты их реакции в воде выполняют только вспомогательную роль.

Простые наблюдения показывают, что время растворения таблетки шипучего аспирина в стакане с водой однозначно зависит от температуры воды – оно резко уменьшается с ростом температуры. Попробуем измерить и изучить эту температурную зависимость. При соблюдении некоторых правил это удастся сделать довольно точно и не очень сложно. Запасемся часами с секундной стрелкой (механическими или электронными) с четким (внятным) циферблатом и термометром для измерения температуры воды. А лучше двумя или тремя термометрами, позволяющими точнее измерять температуру и холодной и горячей воды в стакане (в разных температурных диапазонах).

Прежде чем проводить намеченные измерения, нам следует подготовиться к этой работе. Не обсуждая все подробности, заметим, что нам надо научиться приготавливать в сосуде, например в стакане, воду с заданной, но разной температурой, быть уверенным, что в объеме температура воды

в разных местах практически одинаковая и что при комнатных условиях внешней среды эта температура «не убежит» заметно из-за нагрева или охлаждения окружающим воздухом за время проведения одного измерения (т.е. за «время жизни» таблетки в воде). Температура воды должна быть не только одинаковой по всему объему, но и равняться температуре стенок стакана. Надо также проверить, что у термометров не сбита температурная шкала, а циферблат часов удобен и подходит для надежных фиксаций временных интервалов с секундной точностью. Полезен такой подготовительный опыт: исследуйте, как изменяется со временем температура первоначально нагретой (например, кипятка) или охлажденной (в холодильнике) воды при приближении к равновесной комнатной температуре, когда стакан с водой стоит на столе на воздухе.

Мы экспериментировали с таблетками шипучего аспирина-С фирмы Вауер (рис. 1). Указываемая производителем



Рис. 1. Термометр, часы и таблетка аспирина-С фирмы Вауер (в упаковке), используемые в опыте

гарантированная герметичность упаковки таблетки более 2 лет. В качестве основного термометра использовался стеклянный градусник ТФ-3-М1, купленный в магазине фототоваров и предназначенный для работы с растворами фотореактивов. Термометр этот без ртути: рабочее вещество – подкрашенная жидкость (видимо, спирт или толуол) в капилляре. Важно, что у этого из-

мерителя температуры четкая и чувствительная шкала с ценой деления 0,5 градусов Цельсия. Для опытов при температуре воды вблизи нуля и ближе к точке ее кипения мы брали другие лабораторные градусники с соответствующими шкалами.

Сам опыт состоял в следующем. Устанавливалась равновесная температура воды в почти полном стакане. Затем вскрывался пакетик с шипучим аспирином, и его таблетка опускалась в стакан с водой. Одновременно фиксировалось время начала процесса растворения таблетки. Измерялась длительность растворения таблетки, которая точно фиксировалась визуально с помощью секундной стрелки наручных часов. Заметим, что, перед тем как полностью исчезнуть, таблетка уменьшалась в размерах и всплывала на поверхность воды из-за пузырьков газа, прилипших к поверхности тающей таблетки. Поэтому момент исчезновения плавающей таблетки определялся довольно точно и, как показал опыт, с малым разбросом значений длительности процесса (что очень важно!) при одной и той же температуре воды. После полного (визуального) растворения таблетки в воде еще некоторое, но очень короткое время продолжали выделяться пузырьки газа. Это всплывали прилипшие к стенкам и дну стакана пузырьки и, быть может, продолжалась реакция остатков следов соды и лимонной кислоты, попавших в раствор. Всего от одной таблетки за время реакции выделяется в атмосферу чуть более 100 см<sup>3</sup> углекислого газа (по нашим измерениям с помощью водяного колокола – перевернутого мерного стакана с водой с делениями).

В таблице собраны наши экспериментальные данные, т.е. измеренные времена ( $t$ ) растворения таблеток шипучего аспирина-С при разных температурах ( $\tau$ ) воды

«Время жизни» шипучей таблетки аспирина при разных температурах воды в стакане

Температура $\tau$ , °С	63,5	50	86	0	18	24	42,5	22,5	11,5
Длительность $t$ , мин	0,37	0,55	0,33	9,75	2,1	1,42	0,58	1,33	3,25
Температура $\tau$ , °С	15	17,5	8	3,2	10	30,5	20	10,5	10
Длительность $t$ , мин	2,33	1,833	4,33	6,5	3,17	0,79	1,29	3,5	3,17

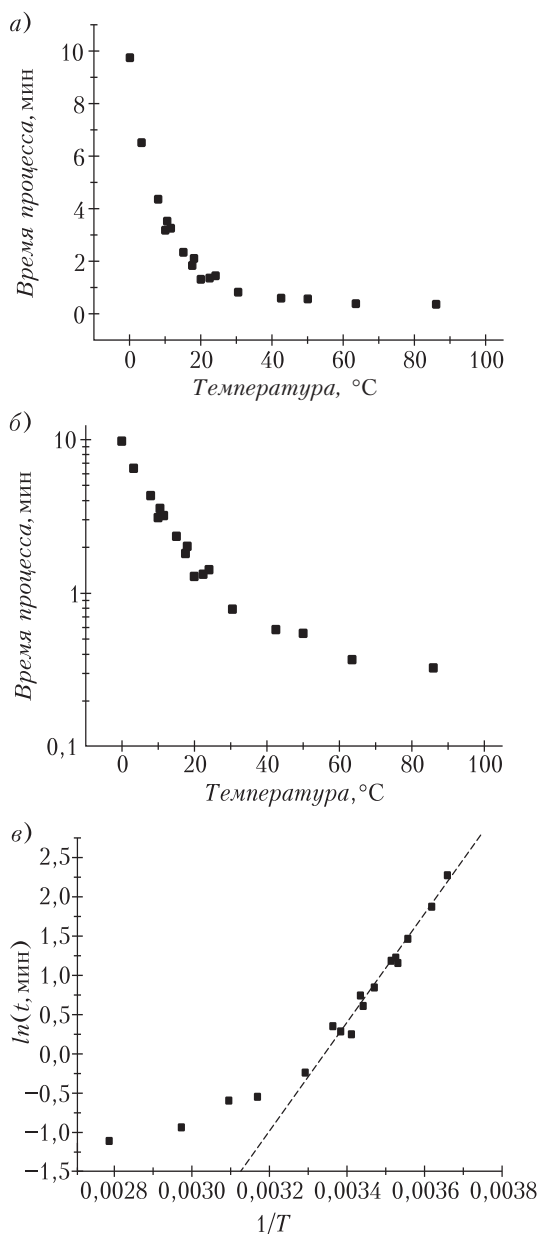


Рис. 2. Температурная зависимость времени растворения шипучей таблетки в стакане воды: а) линейный масштаб по двум осям; б) полулогарифмический масштаб; в) зависимость натурального логарифма времени растворения от обратной абсолютной температуре величины, наклон пунктирной прямой – ее уравнение  $y = 23,0 \left(1 - \frac{300}{T}\right)$  – определяет энергию активации

в стакане. Длительность процесса растворения указана в минутах.

Сам опыт несложный, его можно проводить даже боля, «добывая» одну – две новые экспериментальные точки в сутки и используя потом лекарство по своему назначению, если это рекомендовал вам лечащий врач.

Раньше, чем делать физические выводы, попробуем найти аналитическую зависимость времени реакции  $t$  или ее скорости  $v \sim 1/t$  от температуры. Обычно для построения кривых по экспериментальным данным используются численные значения результатов измерений (в нашем случае данных из таблицы). Но для наглядности результатов часто по экспериментальным точкам строят графики, выбирая удобные шкалы по осям и единицы измерений.

На рисунке 2,а результаты измерений представлены на графике с линейными шкалами по двум осям. Видно, что через экспериментальные точки можно провести гладкую монотонную кривую, вблизи которой лежат все точки с относительно небольшими отклонениями от кривой. При изменении температуры от 0 до 90 °C «время жизни» таблетки  $t$  уменьшается почти в 30 раз, т.е. во столько же раз увеличивается скорость протекания процесса  $v$ . При высоких температурах скорость реакции, как видно из графика, растет с температурой, но не так быстро, как для реакции в холодной воде.

Чтобы подробнее рассмотреть эти части результатов (для горячей и холодной воды), представим данные в полулогарифмическом масштабе (рис. 2,б). На этом графике видно, что в диапазоне температур 0 – 30 °C зависимость скорости от температуры – это с высокой точностью экспонента. Выше этих температур зависимость скорости процесса по сравнению с экспонентой более плавная.

Сделаем еще один шаг. В термодинамике и теплофизике часто температуру измеряют не в градусах Цельсия и обозначают  $\tau$ , а в абсолютной шкале в градусах Кельвина и обозначают  $T$ , при этом  $T = T_0 + \tau$ , где  $T_0 = 273,15$ . Чтобы изменить знак наклона кривой  $t(T)$  и сдвинуть ее по оси абсцисс, будем отсчитывать не абсолют-



ную температуру, а обратную ей величину  $1/T$ . В результате мы получим график, показанный на рисунке 2,в. Правая группа точек графика расположена практически на прямой линии, которая на рисунке изображена пунктиром. А это означает, что температурная зависимость константы  $k$  ( $k \sim v$ ) скорости растворения шипучей таблетки в воде в этом температурном диапазоне ведет себя как экспонента:

$$k = A \exp(-T_a/T) = A \exp(-E_a/(RT)). \quad (2)$$

Но это есть не что иное как знаменитое уравнение Аррениуса, где  $k$  – константа скорости реакции,  $A$  – постоянная Аррениуса, характеризующая каждую конкретную реакцию,  $E_a = RT_a$  – еще одна постоянная, характерная для каждой реакции и называемая энергией активации или температурой активации  $T_a$  для температурной шкалы энергий,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Заметим, что в кинетике принято рассматривать не саму скорость реакции, а ее величину, нормированную на объем реагирующих веществ или на площадь поверхности образца, если, как в нашем случае, реакция идет на поверхности (на границе раздела фаз). Эта нормированная скорость и называется константой скорости реакции  $k$ . При фиксированных условиях опыта или какого-либо химического процесса скорость реакции со временем обычно уменьшается, так как реагирующие вещества расходуются в ходе реакции.

Соотношение между скоростью реакции и температурой впервые (1889 г.) установил шведский физико-химик Сванте Аррениус (1859–1927), Нобелевский лауреат по химии за 1903 год. Плодотворная идея Аррениуса, которая «сидит» в его уравнении (2), состоит в том, что «...молекулы, сталкиваясь, не реагируют, если не обладают определенным минимумом энергии, иначе говоря, энергией активации. При малой энергии активации реакции проходят очень быстро, а при высокой энергии активации химический процесс может протекать с бесконечно малой скоростью и длиться вечно. Если же в последнем случае поднять температуру настолько, что группа молекул приобретет необходи-



*Сванте Август Аррениус*

мую энергию активации, то скорость реакции может резко повыситься, и даже все закончиться взрывом...». Это мы процитировали отрывок из книги «Краткая история химии» (М.: Мир, 1983) известного ученого, популяризатора и писателя-фантаста А.Азимова.

В случае растворения шипучей таблетки аспирина в воде энергия активации из опыта получилась равной около 6900 К в температурной шкале или 57,4 кДж/моль в общепринятых единицах. В атомных единицах эта величина соответствует значению около 0,6 эВ. Относительная погрешность результата наших измерений  $E_a$  для рассматриваемой реакции, как следует из учета разброса точек вблизи прямой на рисунке 2,в, менее 2%.

Уравнение Аррениуса в истории науки занимает особое место. Оно часто используется в современных научных исследованиях в разных областях физики и химической кинетики, в технологических приложениях, например при ускоренных испытаниях долговечности интегральных схем или изучении разного рода процессов диффу-

зии веществ в среде и на поверхности.

Формула (2) столь ценна и работоспособна, что некоторые исследователи сейчас даже уверены, что именно за ее вывод Аррениус получил Нобелевскую премию. Это не так. Премию по химии ему дали за теорию электролитической диссоциации – фундаментального процесса, объясняющего природу многих химических реакций.

О работах ученых прошлого теперь мало кому известно. Часто мы забываем, что история – учитель жизни (*Historia est magistra vitae*). Интересно, что более века назад Аррениус, кроме всего прочего, занимался вопросами биологической химии, иммунологией, проблемами космологии и даже происхождением шаровой молнии. Он, как это ни удивительно, – автор первого учебника по космической физике. Аррениус первым сформулировал гипотезу о парниковом эффекте, столь важном для Земли, изучал влияние солнечной радиации на земную атмосферу и еще мно-

гое-многое другое. Сотрудникам физфака МГУ знакома его переписка и дружба с российским ученым П.Н. Лебедевым, которому он помогал в трудное время его ухода из университета и разгона руководимой им экспериментальной группы. Аррениус поддерживал научные контакты с российскими учеными, был иностранным членом-корреспондентом Петербургской Академии наук (с 1903 г.), почетным членом Академии наук СССР (с 1925 г.).

Аррениус первым предложил использовать понятие энергии активации  $E_a$ , правильно объяснив ее роль в химических реакциях, или, другими словами, раскрыл физический смысл своего уравнения. С помощью простых теоретических оценок и представлений сейчас уже несложно вывести его формулу (2). Но об этом пойдет речь во второй части статьи.

*(Продолжение следует)*

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

**Мы начинаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт [kvantik.com](http://kvantik.com)).**

**Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.**

**Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.**

**Задания, решения и результаты публикуются на сайте [sites.google.com/view/savin-contest](http://sites.google.com/view/savin-contest) Желаем успеха!**

**1.** Можно ли расставить в клетках квадрата  $3 \times 3$  различные натуральные числа, в записи каждого из которых могут присутствовать лишь цифры 7 и 8, так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была одна и та же?

*С.Костин*

**2.** а) Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на несколько равнобедренных прямоугольных треугольников, среди которых нет одинаковых? б) Можно ли так разрезать квадрат?

*К.Банков*

**3.** Есть проволочный каркас прямоугольного ящика и веревка. Разрешается выбрать любые несколько точек на каркасе, соединить их подряд натянутой веревкой и измерить ее длину – от первой точки до последней. Предложите способ за два таких измерения найти суммарную площадь всех шести граней ящика.

*А.Перепечко*

**4.** Дан треугольник  $ABC$ . Постройте точки  $A_1, B_1, C_1$ , образующие правильный треугольник или совпадающие, такие, чтобы отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  были равны и имели наименьшую возможную длину.

*Е.Бакаев*

# Изобретая логарифмическую линейку

В.КЛЕПЦЫН

**Д**О КАК МИНИМУМ 1960-Х ГОДОВ логарифмическая линейка была непременной принадлежностью инженера. Она позволяла быстро выполнять различные действия – умножать, возводить в степень и многое другое, что сейчас для нас делает компьютер, калькулятор или иногда даже приложение на телефоне.

А как она была устроена? Давайте разберемся наиболее надежным способом: придумаем ее сами – а заодно научимся с ней обращаться.

Начнем с гораздо более простого вопроса: а как бы нам сделать что-нибудь, что позволяло бы одним движением складывать (небольшие) числа?

Представим себе, что мы взяли две (настоящие, деревянные!) линейки, причем на одной из них шкала у верхней границы (как это обычно бывает), а на другой у нижней (а вот так почти никогда не бывает, но можно же и самим перенести деления с одной линейки на другую). Приложим их друг к другу так, чтобы совпали нули – тогда шкалы на них совпадают (рис.1). Сдвинем теперь одну из них, нижнюю, вправо – скажем, на 2 см. Что будет тогда напротив отметки 3 см на той же линейке? Эта отметка на расстоянии в 3 см от нуля на нижней линейке – который сам находится на расстоянии в 2 см от нуля на верхней. Значит, всего эта отметка находится на расстоянии  $2\text{ см} + 3\text{ см} = 5\text{ см}$  от нуля на верхней линейке, и напротив отметки в 3 см мы видим отметку 5 см.

Ура! Всего лишь с помощью абзаца рассуждений и двух линеек мы научились механически складывать  $2 + 3$  и получать в ответе 5. Но лиха беда начало!

А как складывать двузначные числа? Да точно так же. На линейке ведь обычно есть

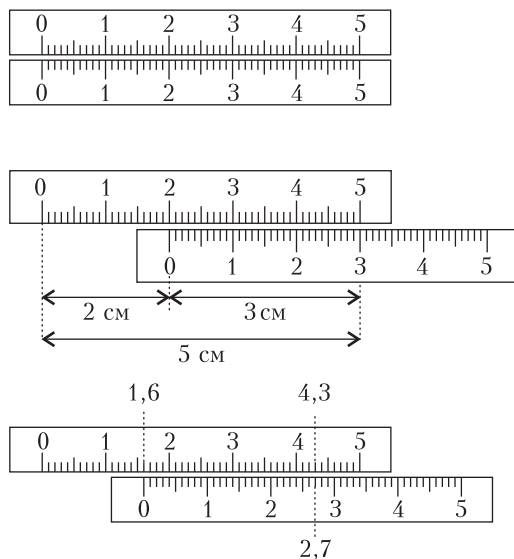


Рис. 1. Сложение с помощью двух линеек

не только сантиметровая, но и миллиметровая шкала. И можно сказать, что  $16 + 27 = 43$ , можно, что  $16\text{ мм} + 27\text{ мм} = 43\text{ мм}$ , а можно, что  $1\text{ см } 6\text{ мм} + 2\text{ см } 7\text{ мм} = 4\text{ см } 3\text{ мм}$  (см. рис.1).

Ну хорошо. Мы научились механически, сдвигом линейки, складывать одно- и двузначные числа. Но умножать-то труднее! Как бы нам и эту операцию переложить на нашего механического помощника?

Давайте сначала представим себе, что мы хотим умножать друг на друга не любые числа, а только 10, 100, 1000 и так далее. Не то чтобы это было очень сложно: когда мы умножаем друг на друга числа вида «единица и сколько-то нулей», нам нужно просто сложить количество нулей: скажем,  $100 \times 1000 = 100000$ .

Постойте, сложить? Так это мы уже умеем! Давайте опять возьмем нашу линейку и вместо деления «1 см» поставим 10, вместо деления «2 см» поставим 100,

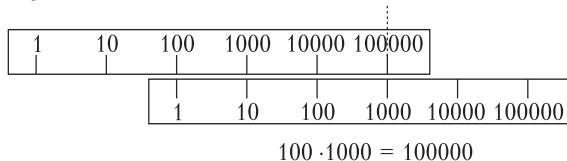


Рис. 2. Умножение степеней 10

вместо деления «3 см» поставим 1000 и так далее (рис.2). И вместо нулевого деления поставим «единицу с нулем нулей», т.е. просто 1. Но вот куда нам поставить другие числа, чтобы выполнять умножение таким же сдвигом линеек?

Давайте сформулируем явно, что именно должно выполняться. Нужно, чтобы если на расстоянии  $r$  см стоит число  $a$ , а на расстоянии  $s$  см стоит число  $b$ , то на расстоянии  $r + s$  см должно стоять число  $ab$  (рис.3). А можно ли так сделать?

Наша конструкция позволяет угадать, как это надо делать. А именно: число

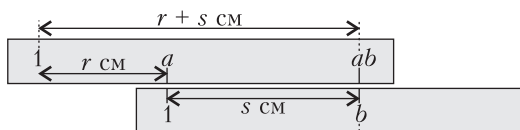


Рис. 3. Логарифмическая линейка: принцип работы

«единица с  $n$  нулями» – это произведение  $n$  десятков, иначе говоря,  $n$ -я степень 10:

$$1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ нулей}} = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ десятков}} = 10^n.$$

Оказывается, что можно определить и нецелую степень числа. Так, например, хотя «полраза» число само на себя умножить нельзя, но степень  $\frac{1}{2}$  определена, и это просто квадратный корень из числа. И все остальные нецелые степени – хотя это дело и более сложное (и техническое) – определить тоже можно. А тогда становится понятным, какой должен быть ответ: любое число  $a > 1$  мы хотим поставить на расстоянии в  $r$  сантиметров от начала, где  $r$  такое, что  $10^r = a$ . Число  $r$  называют

десятичным логарифмом числа  $a$  – и обозначают  $\log_{10} a$  (или  $\lg a$ ).

Простое тождество  $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$  выполняется и для нецелых степеней,  $10^r \cdot 10^s = 10^{r+s}$  – и его перевод на язык (десятичных) логарифмов дает как раз требуемое:

$$\log_{10} a + \log_{10} b = \log_{10} ab. \quad (1)$$

Теперь, чтобы сделать логарифмическую линейку, остается разметить наши две линейки, поставив каждое число  $a$  на расстоянии в логарифм  $a$  сантиметров (собственно, потому ее и называют – логарифмической). Или, точнее, в  $\log_{10} a$ , умноженном на какую-нибудь единицу длины  $L$ . На самом деле, единица длины 1 см слишком маленькая, и лучше взять  $L$  в районе 10–15 сантиметров. На обе линейки наносится шкала, показанная на рисунке 4. Такие шкалы, что логично, тоже называют логарифмическими.

Разумеется, логарифмы бывают не только десятичные – можно зафиксировать любое основание  $c$ , тогда решение  $x$  уравнения  $c^x = a$  называется логарифмом  $a$  по основанию  $c$  и обозначается  $\log_c a$ . Конечно же, и для них верно аналогичное (1) тождество:

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab. \quad (2)$$

Впрочем, смена основания логарифма приводит только к тому, что все результаты изменяются в одно и то же количество раз. Поэтому смена основания логарифма равносильна изменению единицы длины  $L$  при построении шкалы – или, что то же самое, сжатием или растяжением шкалы в соответствующее число раз.

В настоящей логарифмической линейке обычно ее подвижная часть вставляется в своеобразный «желоб» в неподвижной, чтобы одновременно легко вдоль нее скользить и не выпадать. Самому сделать такое из дерева, конечно, не самая простая задача. Но для демонстрации принципа можно



Рис. 4. Логарифмическая шкала

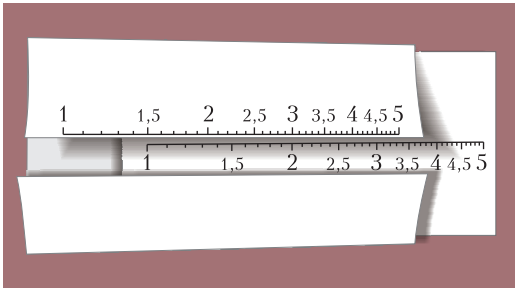


Рис. 5. Самодельная логарифмическая линейка из бумаги

сделать ее и из бумаги, «обернув» неподвижную часть вокруг подвижной (рис.5) и нанеся на каждую логарифмическую шкалу (например, воспользовавшись рисунком 4). Попробуйте это сделать!<sup>1</sup>

Как можно увидеть из фотографии на рисунке 6, настоящая логарифмическая линейка сложнее, чем наше простое описание: на ней значительно больше шкал, и благодаря этому она позволяет легко выполнять намного больше операций. Так, шкалы А (на неподвижной части) и В (на подвижной) на этой фотографии – это те самые логарифмические шкалы. Шкала D – это шкала А, сжатая в два раза. Благодаря этому можно возводить в квадрат и извлекать квадратные корни одним движением ползунка с нитью (который позволяет точно сопоставлять числа на разных шкалах). Подумайте, как именно это делается!

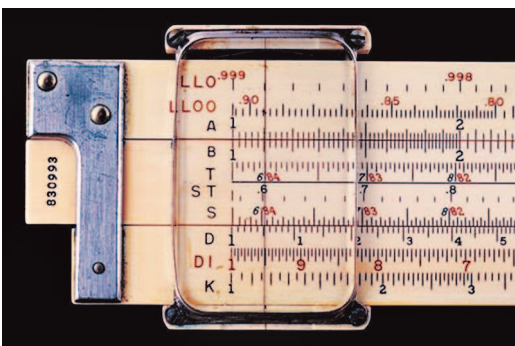


Рис. 6. Логарифмическая линейка: шкалы и нить

<sup>1</sup> Симулятор логарифмической линейки есть на сайте «Математические этюды»: см. <http://www.etudes.ru/ru/etudes/slide-rule/>. Но сделать своими руками все-таки интереснее!

На некоторых шкалах (их зачастую подписывают символами LL) число  $a$  стоит на расстоянии в  $\log(\log a)$  единиц длины.<sup>2</sup> Это позволяет одним движением возводить число в любую – даже нецелую! – степень. Действительно, точно так же, как логарифм превращает произведение в сумму,  $\log(ab) = \log a + \log b$ , он превращает возведение в степень в умножение:

$$\log(a^b) = b \log a.$$

Применяя логарифм еще раз, получаем

$$\log \log(a^b) = \log \log a + \log b,$$

и поэтому для возведения в степень достаточно иметь логарифмическую шкалу и  $\log \log$ -шкалу, подвижные друг относительно друга (рис.7).

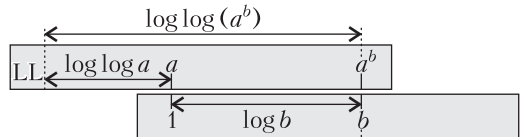


Рис. 7. Возведение в степень

Единственная тонкость – наше определение логарифма требует умения возводить в нецелую степень, а мы пока ни слова не сказали о том, как это хотя бы в принципе можно делать (не полагаясь на уже запрограммированные калькулятор или компьютер). Поэтому – давайте предъявим совсем другую, *геометрическую* конструкцию логарифма.

А именно, нарисуем график функции  $y = \frac{1}{x}$ , иными словами, *гиперболу*  $xy = 1$ .

И для каждого числа  $a > 1$  найдем площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного осью абсцисс, нашей гиперболой и вертикальными прямыми  $x = 1$  и  $x = a$  (рис.8). Назовем эту площадь *натуральным логарифмом* числа  $a$  и обозначим ее через  $\ln a$ .

Вообще говоря, мы сейчас применили понятие «площадь» к не совсем школьному объекту: криволинейному четырехугольнику. И на уровне строгости универ-

<sup>2</sup> Мы не уточняем основание логарифма: оно одно и то же, но для наших рассуждений неважно, каким именно мы его выберем.

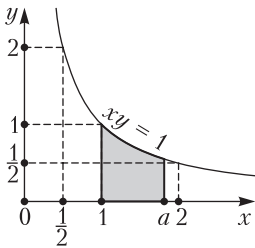


Рис. 8. Гипербола и площадь участка

Так вот – давайте каждое число  $a$  поставим на расстоянии в  $\ln a$  сантиметров от «начала отсчета» (в котором стоит число 1). Чтобы проверить, что при такой расстановке мы действительно сможем умножать числа простым сдвигом линейки, как показано на рисунке 3, нам нужно проверить аналогичное (2) тождество

$$\ln a + \ln b = \ln(ab). \quad (3)$$

И это можно доказать чисто геометрически!

Действительно, пусть  $a, b > 1$ . Тогда  $\ln(ab)$  – это площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного осью абсцисс, гиперболой, прямой  $x = 1$  и прямой  $x = ab$ . И прямая  $x = a$  разбивает эту фигуру на две части, площадь одной из которых равна  $\ln a$  (эта часть на рисунке 9 слева красная). Значит, нам нужно проверить, что площадь оставшейся (синей) фигуры равна  $\ln b$ . Иными словами (если вспомнить, как мы определяли натуральный логарифм  $b$ ), что площади двух фигур, высекаемых из области под гипербо-

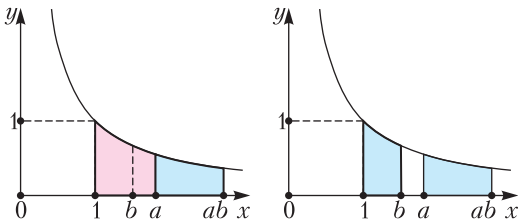


Рис. 9. Проверка тождества (3)

<sup>3</sup> Автор пользуется случаем порекомендовать читателям мультфильм «Площади фигур» на том же сайте «Математические этюды», <http://www.etudes.ru/ru/etudes/.gures-area/>, посвященный как раз рассказу об определении площади не-многоугольных фигур.

лой неравенствами  $1 \leq x \leq b$  и  $a \leq x \leq ab$  (они показаны синим на рисунке 9 справа), равны.

Чтобы это проверить, давайте сожмем все по горизонтали в  $a$  раз – и во столько же раз растянем по вертикали. Заметим, что вторая фигура при этом переходит в первую. Действительно, гипербола  $xy = 1$  переходит в себя: ведь  $\left(\frac{x}{a}\right) \cdot (ay) = xy$ , ось  $x$  – тоже. И наконец, полоса  $a \leq x \leq ab$  переходит как раз в полосу  $1 \leq x \leq b$ .

Но при таком преобразовании сохраняются и площади. Действительно, очень естественно ожидать, что при сжатии по горизонтали в  $a$  раз площади всех фигур в  $a$  раз и уменьшатся. И это действительно так. Можно в это просто поверить, а можно сказать, что это точно правда для любого прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами. А если наложить на фигуру мелкую-мелкую сетку, то можно объединением таких прямоугольников эту фигуру приблизить. Точно так же, растяжение по вертикали в  $a$  раз увеличивает площади в  $a$  раз. А вместе они умножают площади на  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ , т.е. не изменяют.

Итак, наше преобразование сохраняет площади и переводит вторую из синих фигур на рисунке 9 справа в первую. Значит, площади этих фигур равны! Вот мы и проверили тождество (3). И тем самым научились (хотя бы теоретически!) создавать логарифмическую линейку.

Конечно же, натуральный логарифм  $\ln a$  – это логарифм по некоторому основанию. Несложно понять, каким условием это основание – его обозначают буквой  $e$  – задается: раз

$$\ln e = \log_e e = 1,$$

то  $e$  – это такая абсцисса, что площадь под гиперболой  $xy = 1$  от  $x = 1$  до  $x = e$  равна 1 (рис.10).

Число  $e = 2,718281828459045\dots$  – одно из самых замечательных чисел в математике, столь же важное, как всем известное число  $\pi$ .

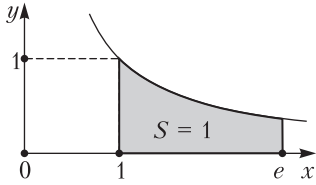


Рис. 10. Определение  $e$ : единичная площадь

Кстати, из нашего геометрического определения натурального логарифма можно получить и хорошие *приближенные* формулы для него. А именно: возьмем число  $a = 1 + \epsilon$ , близкое к единице (т.е. с очень маленьким  $\epsilon$ , например  $a = 1,01$ ). Что можно сказать о его натуральном логарифме?

В этом случае фигура, площадь которой равна  $\ln a$ , похожа на прямоугольник с основанием  $\epsilon$  и высотой 1 – и это дает нам первое приближение  $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$ . Но можно пойти дальше – сказать, что эта фигура отличается от прямоугольника на криволинейный треугольник. Приблизим этот криволинейный треугольник настоящим, проведя к гиперболе  $xy = 1$  касательную в точке  $(1, 1)$  (рис. 11). Эта касательная из-

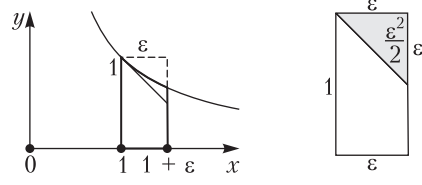


Рис. 11. Приближение для  $\ln(1 + \epsilon)$

за симметрии пойдет под углом в  $45^\circ$  к горизонтали; значит, и приближающий треугольник будет равнобедренным прямоугольным – а тогда его площадь примерно равна  $\frac{\epsilon^2}{2}$ . И это дает более точную формулу

$$\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Хотя мы и говорили, что  $\epsilon$  должно быть очень маленьким – но даже, например, для  $\epsilon = 0,2$  приближение получается довольно хорошим: оно дает  $\ln 1,2 \approx 0,2 - 0,02 = 0,18$ , в то время как истинное значение  $\ln 1,2 = 0,1823\dots$  И это, наверное, хороший момент, чтобы закончить наш рассказ.

## К 130-летию И.М.Виноградова

Второго (14) сентября 2021 года исполнилось 130 лет со дня рождения выдающегося советского математика академика Ивана Матвеевича Виноградова.

Сын сельского священника, И.М.Виноградов родился в 1891 году в погосте Милолюб Максимовской волости Великолукского уезда. В 1910 году, окончив реальное училище в Великих Луках, поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. В 1920 году он уже профессор Пермского, а затем Петербургского университета. Вместе с академиком С.И.Вавиловым Виноградов разработал план коренной реорганизации Физико-математического института, который в 1934 году был преобразован в Фи-

зический институт имени П.Н.Лебедева во главе с С.И.Вавиловым и Математический институт имени В.А.Стеклова. Директором последнего Иван Матвеевич был почти полвека.

Труды Ивана Матвеевича Виноградова в корне изменили облик аналитической теории чисел. Сердцевиной его научного творчества является созданный им метод тригонометрических сумм.

Тригонометрические суммы – это выражения вида

$$S = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Здесь  $e^{2\pi i f(x)} = \cos(2\pi f(x)) + i \sin(2\pi f(x))$  –



**Иван Матвеевич Виноградов**  
(1891 – 1983)

мнимая экспонента,  $i^2 = -1$ , переменная  $x$  пробегает некоторое конечное множество целых чисел, а функция  $f(x)$  принимает вещественные значения.

Такие суммы естественным образом возникают в классических проблемах теории чисел. Метод тригонометрических сумм позволил И.М.Виноградову значительно усилить полученные ранее результаты (проблема Варинга, асимптотический закон распределения простых чисел, подсчет количества точек с целочисленными координатами в плоских и объемных областях) или же найти решения задач, которые до него вовсе не поддавались исследованию (тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга–Гольдбаха, суммы значений характеров Дирихле и пр.).

Характерными чертами творчества И.М.Виноградова являются комбинаторная изобретательность и способность обходиться минимумом вспомогательных средств, зачастую вовсе элементарных.

Отличие методов И.М.Виноградова от известных ранее можно пояснить на примере проблемы Варинга, которая состоит в следующем. Пусть  $n \geq 2$  – произвольное целое число. Требуется доказать существование числа  $k$ , зависящего лишь от  $n$ , такого, что всякое целое  $N \geq 1$  представляется суммой  $k$  неотрицательных  $n$ -х степеней целых чисел:

$$N = m_1^n + \dots + m_k^n. \quad (1)$$

В общем виде проблема была решена в 1909 году Д. Гильбертом, однако вопросы о наименьшем возможном значении  $k$  (как функции от  $n$ ), а также о числе  $I(N)$  представлений  $N$  в виде (1) оставались открытыми.<sup>1</sup> Для их разрешения Г.Х.Харди и Дж.И.Литтлвуд стали изучать бесконечные степенные ряды вида

$$F(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} z^{m^n},$$

где  $z$  – комплексное число,  $|z| < 1$ . Возведение такого ряда в степень  $k$  и приведение подобных слагаемых приводит к выражению

$$F^k(z) = \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{+\infty} z^{m_1^n + \dots + m_k^n} = \sum_{N=0}^{+\infty} I(N) z^N.$$

Дальнейшее вычисление коэффициентов  $I(N)$  требует очень сложных и кропотливых выкладок, которые опираются на так называемую интегральную формулу Коши. Использование И.М.Виноградовым вместо бесконечного ряда  $F(z)$  конечной тригонометрической суммы

$$S = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i \alpha x^n}, \quad P = N^{1/n}, \quad (2)$$

а вместо интегральной формулы Коши – очевидного тождества

<sup>1</sup> Желаящие более подробно ознакомиться со вкладом Д.Гильберта, Г.Х.Харди, Дж.И.Литтлвуда, И.М.Виноградова и многих других ученых в решение проблемы Варинга могут обратиться к замечательной обзорной статье Н.А.Вавилова «Компьютер как новая реальность математики: II. Проблема Варинга» («Компьютерные инструменты в образовании», 2020, № 3, с.1–46).



$$\int_0^1 (\cos(2\pi\alpha m) + i \sin(2\pi\alpha m)) d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

( $m$  – целое число) позволило значительно упростить решение проблемы Варинга, сделать его более прозрачным.

Другое существенное новшество, внесенное И.М.Виноградовым, которое позволило существенно усилить результаты предшественников, заключается в способе оценок суммы (2). Последняя является частным примером суммы  $S$ , отвечающей общему случаю, когда  $f(x)$  – многочлен  $n$ -й степени:

$$f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x.$$

Ранее для работы с такими суммами использовался метод, восходящий к Г.Вейлю. Он опирается на соотношение для квадрата модуля тригонометрической суммы:

$$|S|^2 = S \cdot \bar{S} = \sum_{1 \leq x, y \leq P} e^{2\pi i(f(y)-f(x))}.$$

Замена переменной  $y = x + h$  приводит к новой сумме, в показателе экспоненты которой возникает разность вида

$$f(x+h) - f(x) = n\alpha_n x^{n-1} + \beta_{n-2} x^{n-2} + \dots + \beta_1 x$$

– многочлен, чья степень на единицу меньше, чем у исходного. Последовательное применение этого приема сводит в итоге задачу к оценке линейной тригонометрической суммы  $S$  с функцией  $f(x) = n! \alpha_n x$ , т.е. к элементарному нахождению суммы членов геометрической прогрессии. Однако многократное возведение исходной суммы в квадрат и исчезновение всех коэффициентов многочлена, кроме старшего, приводит к существенной потере в точности оценок.

Для преодоления этой трудности И.М.Виноградов использует лишь двукратное возведение исходной суммы в большую степень, которое сохраняет и «заставляет работать» все коэффициенты многочлена. Однако для успеха на таком пути требуется довольно точная верхняя оценка для количества решений некоторой систе-

мы уравнений, неизвестные в которой – натуральные числа. Именно эта оценка, носящая название «теоремы о среднем», и составляет одно из ключевых достижений Ивана Матвеевича.

Еще одной вершиной научной деятельности И.М.Виноградова стал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, т.е. сумм  $S$ , в которых переменная  $x$  принимает значения простых чисел. В простейшем случае линейной функции  $f(x) = \alpha x$ , который отвечает тернарной проблеме Гольдбаха о представлении нечетного числа  $N$  суммой трех простых чисел, Иван Матвеевич обнаружил, что оценка суммы  $S$  сводится к оценке не очень большого числа двойных сумм вида

$$W = \sum_m \sum_n a_m b_n e^{2\pi i \alpha m n},$$

в которых  $a_m, b_n$  – некоторые последовательности, а переменные  $m, n$  пробегает (в отличие от переменной  $x$ ) все подряд идущие целые числа из некоторых промежутков. Последнее обстоятельство позволяет получить оценку суммы  $W$ , а вместе с нею – и исходной суммы, практически элементарно.

Жемчужиной педагогической деятельности Ивана Матвеевича явилось создание им учебника «Основы теории чисел», выдержавшего более десяти изданий и переведенного на многие языки.<sup>2</sup> Тщательный подбор материала, кристальная ясность изложения, красивые и глубокие задачи, помещенные в конце каждой главы, делают эту книгу незаменимым пособием для тех, кто желает серьезно заниматься теорией чисел.

*Т. Бобкина, М. Королев*

<sup>2</sup> И.М. Виноградов. Основы теории чисел. 9-е изд. – М.: Наука, 1981 (все последующие издания являются его репринтным воспроизведением).

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2667 предлагалась на Математической олимпиаде Болгарии 2021 года.

## Задачи M2666–M2669, Ф2673–Ф2676

**M2666.** Пусть  $x, y$  – натуральные числа, большие 1. Оказалось, что  $x^2 + y^2 - 1$  делится на  $x + y - 1$ . Докажите, что  $x + y - 1$  – составное.

Фольклор

**M2667.** Существует ли на плоскости множество  $M$  из 100 точек такое, что для любых 10 различных точек из  $M$  их центр масс также принадлежит  $M$ ?

П.Кожевников

**M2668\*.** Даны две окружности, для которых есть семейство четырехугольников, описанных вокруг первой окружности и вписанных во вторую (вписанно-описанные четырехугольники). Обозначим  $a, b, c, d$  последовательные длины сторон одного из таких четырехугольников (рис.1).

Докажите, что величина  $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b}$  не зависит от выбора четырехугольника.

И.Вайнштейн

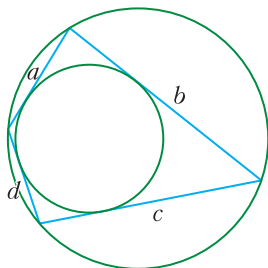


Рис. 1

**M2669\*.** Докажите, что для любого натурального числа  $n$  числа  $1, 2, \dots, n$  можно разбить на несколько групп так, чтобы сумма чисел в каждой группе была равна степени тройки.

В.Новиков

**Ф2673.** «Вода камень точит», – говорит пословица. Асфальт имеет коэффициент прочности на сжатие  $\sigma_{\text{пр}} = 10$  МПа. С какой высоты должны падать в одно и то же место капли воды на асфальт, чтобы он начал разрушаться?

А.Сфальт

**Ф2674.** Длинная,  $L = 2$  м, полиэтиленовая труба диаметром  $D = 2$  см расположена вертикально. Трубу потеряли сверху донизу шерстяной тряпчочкой, и на ее поверхности появились равномерно распределенные электрические заряды. Из шприца, заполненного водой и не имеющего электрического заряда, в направлении, перпендикулярном оси трубы, выпускают со скоростью  $v = 2$  м/с тонкую струйку воды, которая тут же разбивается на одинаковые по размеру мелкие капельки. Место вылета капелек из иглы шприца находится на  $H = 2$  дм ниже верха трубы. Капли все время падения находятся на одном и том же расстоянии  $R = 2$  см от оси трубы. Каков электрический заряд, находящийся на всей поверхности трубы? Соппротивлением

воздуха при движении капелек в нем можно пренебречь.

*А.Водяной*

**Ф2675.** Во время дождя вода, упавшая на крышу, медленно стекает к ее краю, и отрывающиеся от края крыши капли, диаметром 5 мм в полете, имеют начальную нулевую (по отношению к месту отрыва) скорость. Однако, пролетев расстояние  $L = 0,2$  м в воздухе, эти крупные капли приобретают такую же скорость, какую имели мелкие капельки в дожде, а дальше обгоняют их. На рисунке 2 показана связь

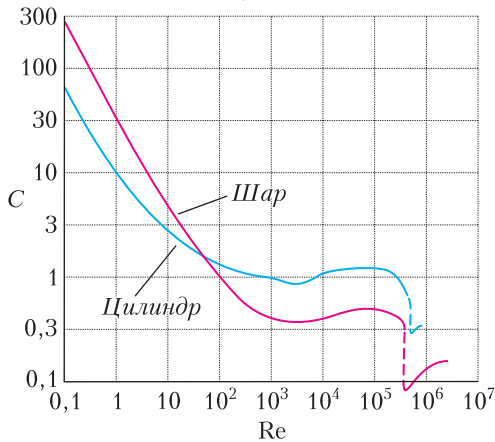


Рис. 2

коэффициента пропорциональности  $C$  между силой сопротивления среды  $F_{\text{сопр}}$  и величиной  $S\rho v^2/2$  в зависимости от числа Рейнольдса  $Re = Dv\rho_{\text{среды}}/\eta_{\text{среды}}$  среды для шара и для длинного цилиндра при поступательной скорости движения цилиндра, перпендикулярной его оси симметрии. Здесь  $S$  — максимальная площадь поперечного к скорости движения предмета сечения,  $D$  — характерный размер движущегося в подвижной среде (в газе или в жидкости) предмета (диаметр шара или цилиндра в частности),  $v$  — скорость поступательного движения предмета относительно покоящейся среды,  $\rho_{\text{среды}}$  — плотность среды,  $\eta$  среды — вязкость среды. Если число Рейнольдса меньше  $10^3$ , то установившемуся режиму обтекания шарика средой соответствует сила вязкого трения, которая описывается формулой Стокса  $F = 3\pi D\eta v$ . Найдите (оцените) установив-

шуюся скорость падения крупных капель. Оцените расстояние, на котором устанавливается скорость больших капель, и размеры (диаметры) мелких капелек дождя.

*К.Дождевой*

**Ф2676.** Астероид имеет форму плоского диска одинаковой толщины по всей его площади. Диаметр диска во много раз больше его толщины. Этот диск состоит из меди, и вся его поверхность черная-черная. Астероид давно летает вокруг Солнца по круговой орбите и обращен к Солнцу все время одной большой поверхностью, на которую лучи Солнца падают перпендикулярно. Обращенная к Солнцу поверхность диска имеет температуру  $T_1 = 300$  К, а противоположная поверхность, не освещенная Солнцем, имеет температуру  $T_2 = 250$  К. Солнечная постоянная для Земли равна  $E = 1370$  Вт/м<sup>2</sup>. Расстояние от Земли до Солнца  $L = 150$  млн км. На каком расстоянии  $x$  от Солнца летает астероид и какова его толщина  $h$ ? Постоянная Стефана — Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>), теплопроводность меди  $\lambda = 400$  Вт/(м · К).

*А.Медный*

**Решения задач M2654–M2657, Ф2661–Ф2664**

**M2654.** На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $E$  и  $F$ , причем  $E$  лежит между  $B$  и  $F$  (рис.1). Диагонали

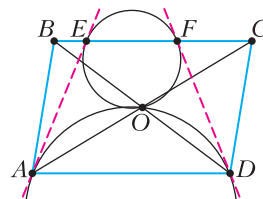


Рис. 1

$AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Прямые  $AE$  и  $DF$  касаются окружности, описанной около треугольника  $AOD$ . Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника  $EOF$ .

Из касания окружности  $(AOD)$  и прямой  $AE$  имеем  $\angle EAO = \angle ADO$ , а из параллельности  $BC \parallel AD$  имеем  $\angle EBO = \angle ADO$  (рис.2). Таким образом,  $\angle EAO = \angle EBO$ ,

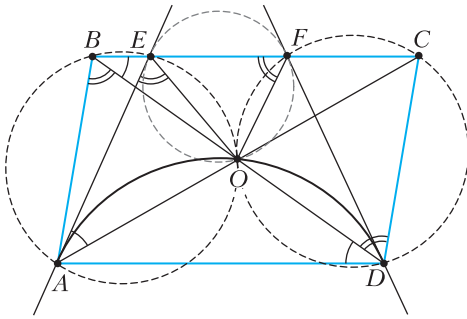


Рис. 2

следовательно, четырехугольник  $ABEO$  вписанный. Аналогично,  $CFOD$  вписанный.

Отсюда, с использованием параллельности  $AB \parallel CD$ , получаем  $\angle OFE = \angle ODC = \angle OBA = \angle OEA$ . Но из равенства  $\angle OFE = \angle OEA$  следует касание окружности  $(EOF)$  и прямой  $AE$ . Аналогично доказываем касание окружности  $(EOF)$  и прямой  $DF$ . Задача решена.

Возможен и другой подход к решению (в котором вообще не используются точки  $B$  и  $C$ ), основанный на таких соображениях: радикальная ось окружностей  $(AOD)$  и  $(EOF)$  — это средняя линия трапеции  $Aefd$ , поэтому она проходит через  $O$ ; с другой стороны, радикальная ось делит пополам отрезок общей касательной, заключенный между точками касания.

А. Кузнецов

**M2655.** Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник  $1 \times 2$  или  $2 \times 1$  такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить.

Пусть учительница выберет квадрат  $K$  размера  $100 \times 100$  и будет закрашивать от-

резки его границы, если это возможно. Пусть перед  $n$ -м ее ходом все эти отрезки закрашены. Тогда  $n \leq 401$ , поскольку всего на границе 400 отрезков. К этому моменту всего закрашено не более чем  $30 \cdot 400$  отрезков, поэтому хотя бы один отрезок внутри квадрата  $K$  не закрашен. Каждым следующим ходом учительница будет закрашивать один из отрезков внутри  $K$ . Спустя несколько ходов все отрезки внутри  $K$  будут закрашены. Тогда перед ходом игрока, который закрасит последний из таких отрезков, найдется искомым прямоугольник  $1 \times 2$ , и учительница победит.

М. Дидин, А. Кузнецов

**M2656.** Возрастающая последовательность натуральных чисел  $a_1 < a_2 < \dots$  такова, что при каждом  $n > 100$  число  $a_n$  равно наименьшему натуральному числу, большему  $a_{n-1}$  и не делимому ни на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Докажите, что в такой последовательности лишь конечное число составных чисел.

Положим  $A = a_n$ . Докажем, что все числа  $a_m$ , большие чем  $A^2$ , — простые числа. Предположим противное. Тогда  $a_m$  имеет делитель  $d$  такой, что  $a < d < a_m$ . Согласно определению  $a_m$ ,  $d$  не является ни одним из  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ . Значит,  $a_k < d < a_{k+1}$  для какого-то  $k \in \{100, 101, \dots, m-1\}$ . Раз  $d$  не было выбрано в качестве  $a_{k+1}$ , оно делится на какое-то  $a_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Но тогда и  $a_m$  делится на  $a_i$ . Противоречие.

П. Кожевников

**M2657\*.** Натуральные числа  $n > 20$  и  $k > 1$  таковы, что  $n$  делится на  $k^2$ . Докажите, что найдутся натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  такие, что  $n = ab + bc + ca$ .

Заметим, что из равенства  $n + a^2 = (a+b)(a+c)$  следует равенство  $n = ab + bc + ca$ . Поэтому для решения задачи достаточно найти такое натуральное  $a$ , что число  $n + a^2$  раскладывается в произведение двух натуральных чисел  $x$  и  $y$ , больших  $a$  (тогда можно положить  $b = x - a$  и  $c = y - a$ ). Согласно условию,  $n = lp^2$  для некоторых простого  $p$  и натурального  $l$ .

Если  $l+1 > p$ , то в силу разложения  $n+p^2 = (l+1)p^2$  в качестве  $a$  можно взять число  $p$ . Также, если число  $l+1$  – составное, то  $l+1 = st$  при  $s, t > 1$ ; тогда снова можно положить  $a = p$ , так как  $n+p^2 = (l+1)p^2 = sp \cdot tp$ .

В оставшемся случае имеем  $n = (q-1)p^2$  при некотором простом  $q \leq p$ . Если  $p > q$ , то  $p = mq + r$  при некотором положительном  $r < q$  и натуральном  $m$ . Тогда число

$$n+r^2 = (q-1)(r+mq)^2 + r^2 = q(p+mq)^2 - mq(2r+mq)$$

делится на  $q$ , а частное от деления больше  $r$ , поскольку  $n = (q-1)p^2 > 1 \cdot q \cdot r$ . Поэтому можно положить  $a = r$ .

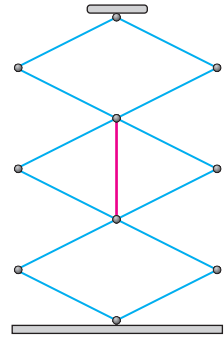
Наконец, если  $p = q$ , то  $n = p^3 - p^2$ , причем  $p \geq 5$  по условию. Тогда  $n + 6^2 = p^3 - p^2 + 36 = (p+3)(p^2 - 4p + 12)$ , где обе скобки больше 6; в этом случае работает  $a = 6$ .

*Замечание.* Несложно показать, что в виде  $ab + bc + ca$  можно представить все натуральные числа  $n$ , для которых число  $n+1$  составное, – в частности, все нечетные числа, отличные от 1. С помощью этого наблюдения и калькулятора несложно найти первые 18 чисел, не представимых в виде  $ab + bc + ca$  (все они меньше пятисот). В статье 2012 года Дж. Борвейна и С. Чоя утверждается, что количество чисел, не представимых в виде  $ab + bc + ca$ , не более 19, и существование девятнадцатого такого числа противоречило бы обобщенной гипотезе Римана (которая в настоящий момент не является ни доказанной, ни опровергнутой).

А. Храбров

**Ф2661.** Для плавного изменения уровня расположения детали над поверхностью стола соорудили показанную на рисунке установку, состоящую из нескольких шарнирно соединенных стержней. Углы, образованные стержнями, равны  $120^\circ$  и  $60^\circ$ . Стержень, отмеченный на рисунке красным цветом, стальной, он имеет длину  $L = 10$  см. Его нагревают со скоростью  $10$  К/мин. С какой скоростью под-

нимается деталь? Коэффициент теплового расширения стали равен  $10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

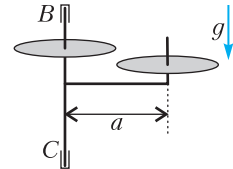


Если мысленно продолжить линию красного цвета, изображающую стальной стержень, вверх и вниз, то она пройдет через верхний и через нижний шарниры конструкции. Все треугольники, в которых одна сторона красная, а две другие синие, равны друг другу. Если считать, что при нагревании изменяется длина только красного стержня, то подставка для детали поднимается вверх со скоростью в три раза большей скорости изменения длины стержня. Таким образом,

$$v = 3 \cdot 0,1 \text{ м} \cdot 10 \text{ К/мин} \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м/мин} = 30 \text{ мкм/мин} = 0,5 \text{ мкм/с}.$$

С. Варламов

**Ф2662.** Горизонтальный стержень, всегда находящийся на одной высоте, жестко соединяет два параллельных друг другу вертикальных стержня и перпендикулярен им (см рисунок). Все стержни невесомые. На вертикальные стержни, оси симметрии которых расположены на расстоянии  $a$  друг от друга,



насажены подшипники (тоже невесомые). А к внешним обоймам подшипников прикреплены два одинаковых массивных плоских тонких диска с равномерным распределением масс по их поверхностям. Оси симметрии дисков совпадают с осями симметрии вертикальных стержней. Один из вертикальных стержней (на рисунке слева) может свободно (совсем без трения) вращаться вокруг своей оси симметрии (и эта ось ВС всегда неподвижна). Трение в подшипниках мало, поэтому на небольших промежутках времени им можно пренебречь. Сначала конструкцию, находящуюся в вакууме, раскрутили так,

что она как целое вращалась вокруг оси  $BC$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , т.е. траектории всех точек конструкции представляли собой горизонтальные окружности. Затем горизонтальный стержень быстро остановили и тут же вновь отпустили. Через некоторое время за счет небольшого трения в подшипниках система снова стала крутиться как целое, но с новой угловой скоростью, равной  $\omega/10$ . Каковы радиусы дисков?

Поскольку при вращении системы вокруг оси  $BC$  трение отсутствует, то это означает, что после быстрой остановки и отпущения горизонтального стержня сохраняется суммарный момент количества движения системы. Пока горизонтальный стержень был в покое, момент количества движения складывался из двух моментов количества движения дисков, которые вращались с угловой скоростью  $\omega$ . Для двух дисков этот момент равен  $\omega mR^2$ , где  $R$  – искомый радиус дисков. Момент количества движения этой конструкции как целого при вращении с угловой скоростью  $\omega/10$  равен произведению этой угловой скорости на момент инерции механической конструкции относительно оси  $BC$ , равный  $2 \cdot \frac{mR^2}{2} + ma^2$ . Итак,

$$\omega mR^2 = \frac{\omega}{10} (mR^2 + ma^2).$$

Отсюда следует, что

$$R = \frac{a}{3}.$$

В.Дмитриев

**Ф2663.** Про планету *Cheese* известно, что она представляет собой однородный шар радиусом  $R$ , в котором имеется сферическая полость радиусом  $R/2$ , причем полость соприкасается с поверхностью планеты (рис.1). Плотность материала планеты  $\rho$ . Также известно, что эта планета равномерно вращается вокруг оси, про-

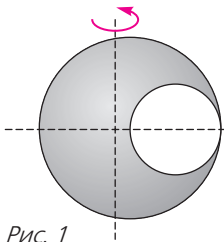


Рис. 1

ходящей через ее центр масс и перпендикулярной оси симметрии планеты. Внутри полости было решено разместить наблюдательный пункт так, чтобы он оказался на оси симметрии планеты и при этом не потребовалось бы включать двигатели или привязывать его к внутренним стенкам полости. Вычисления показали, что этот наблюдательный пункт может располагаться в самом центре полости. С какой угловой скоростью вращается планета?

Пусть  $Z_{ш}$  – центр шара, а  $Z_{п}$  – центр полости (рис.2). Тогда центр масс  $O$  пла-

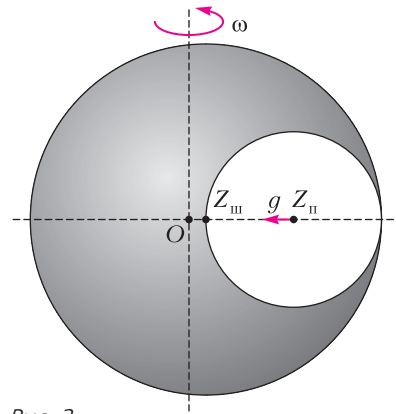


Рис. 2

неты с полостью будет расположен на ее оси симметрии, причем  $OZ_{п} = \frac{4}{7}R$ ,  $OZ_{ш} = \frac{1}{14}R$ . Как известно (см., например, книгу: Л.Э.Генденштейн, Л.А.Кирик, И.М.Гельфгат. Решение ключевых задач по физике для основной школы. – М.: Илекса; задача О-130), внутри полости имеется однородное гравитационное поле, направленное вдоль линии центров от  $Z_{п}$  к  $Z_{ш}$ . Напряженность этого поля равна

$$g = \frac{4}{3} \pi G \rho (Z_{п} - Z_{ш}) = \frac{2}{3} \pi G \rho R.$$

В абсолютной системе отсчета наблюдательный пункт равномерно движется по окружности радиусом  $r = OZ_{ш} + R/2 = OZ_{п}$ , т.е. имеет место равенство  $\omega^2 r = g$ , откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{7}{6}} \pi G \rho.$$

*Замечание.* Нетрудно сообразить, что найденное равновесие не только неустойчиво, но и не изолировано: такие равновесия заполняют отрезок, параллельный оси вращения, расположенный внутри полости и проходящий через ее центр.

В. Никонов

**Ф2664.** Расстояние от Юпитера до Солнца примерно в 5,2 раза больше среднего расстояния от Земли до Солнца. Юпитер светит не собственным излучением, а рассеянным во все стороны солнечным светом, которым он освещается. Плоскости почти круговых орбит Земли (З) и Юпитера (Ю) при их движении вокруг Солнца (С) почти совпадают. При каком значении угла ЗСЮ видимая с Земли часть освещенной поверхности Юпитера самая маленькая? Найдите также отношение видимых с международной космической станции (МКС) яркостей Юпитера в ситуациях, когда видно почти 100% его освещенной поверхности.

Для того чтобы видимая с Земли часть освещенной поверхности Юпитера была самой маленькой, нужно, чтобы угол ЗЮС (или, что то же самое, угол СЮЗ) был самым большим. По теореме синусов имеем

$$\frac{\sin \angle ЗЮС}{СЗ} = \frac{\sin \angle СЗЮ}{СЮ}.$$

Поскольку расстояния СЮ и СЗ фиксированы (орбиты Земли и Юпитера почти круговые), то угол ЗЮС максимален, когда максимален синус этого угла, т.е. когда угол СЗЮ равен 90°. При этом

$$\sin \angle ЗЮС = \frac{СЗ}{СЮ} = \frac{1}{5,2}, \text{ т.е.}$$

$$\angle ЗЮС = \arcsin \frac{1}{5,2} \approx 11^\circ.$$

А значит, искомый угол равен

$$\angle ЗСЮ = 90^\circ - \angle ЗЮС \approx 79^\circ.$$

Почти 100% освещенной поверхности Юпитера с МКС будет видно в двух случаях: когда Юпитер находится дальше всего от Земли и когда он находится ближе всего к Земле (в обоих случаях почти на

линии Солнце – Земля). Пользуясь информацией из предварительных сведений, получаем, что отношение видимых яркостей Юпитера в ситуациях, когда он ближе всего к Земле (максимум) и дальше всего от Земли (минимум), равно

$$\left(\frac{6,2}{4,2}\right)^2 \approx 2,18.$$

Д. Сергеев

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<b>УСЛУГИ</b>	<b>АССОРТИМЕНТ</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a></li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul>

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

## Неисчерпаемый танграм

*(начало см. на 2-й с. обл.)*

В «Кванте» танграм уже неоднократно обсуждался (см., например, статью А.П.Савина «Задачи на разрезание» в «Кванте» №7 за 1987 г. и статью А.Панова «Загадка фигуры №51» в №12 за 1982 г.), но эта игра-головоломка настолько богата, что рассказывать о ней можно снова и снова.

В танграме не просто семь элементов, а глубоко продуманная система, которая содержит ряд закономерностей и выявляет несколько уровней понимания отношений между ними.

Площади элементов являются степенями двойки. Если площадь маленького треугольника принять за 1, то площади трех средних фигур равны 2, а площади больших треугольников равны 4 (рис.1). Суммарная площадь всех элементов тоже степень двойки – она равна 16.

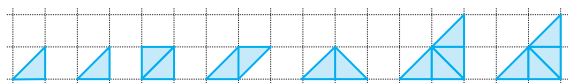


Рис. 1

Три средних элемента – квадрат, параллелограмм и треугольник – представляют собой все возможные комбинации двух маленьких треугольников.

Если мы хотим, чтобы стороны фигур точно подходили по длине, то гипотенузу маленького треугольника надо прикладывать к катету среднего треугольника, а гипотенузу среднего треугольника – к катету большого. Если проделать это последовательно, то каждый раз равнобедренный прямоугольный треугольник будет удваиваться (рис.2). Подключая остальные элементы танграма, этот процесс можно продолжить. Как сложить самый большой треугольник на рисунке 2?

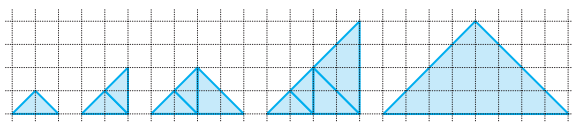


Рис. 2

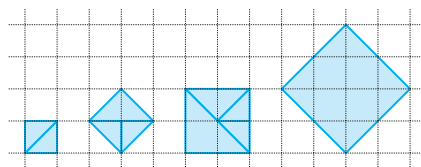


Рис. 3

Аналогично можно построить и последовательность удваивающихся квадратов. Как из всех элементов танграма сложить самый большой квадрат на рисунке 3?

Параллелограмм, входящий в набор танграма, отличается от остальных элементов: его свойства меняются при переворачивании (рис.4). Чтобы убедиться в этом,

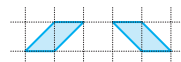


Рис. 4

сложите большой квадрат из всех элементов, потом выньте параллелограмм, переверните его и попробуйте положить обратно – он не встанет на свое место, т.е. это будет уже другой параллелограмм. С этим связаны трудности при сборке некоторых фигур, поскольку иногда необходимо перевернуть параллелограмм. На этом же, кстати, «погорели» производители магнитного танграма: они приклеили магнит только с одной стороны параллелограмма и, тем самым, обеднили возможности сборки.

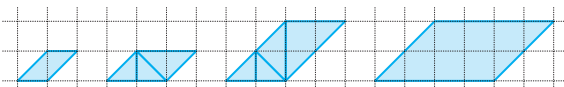


Рис. 5

Попробуйте по аналогии с рядами треугольников и квадратов построить из всех фигур танграма самый большой параллелограмм на рисунке 5.

*(Продолжение следует)*

А.Ковальджи



## Задачи

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что расставил цифры 0, 1 и 2 в клетках таблицы  $7 \times 7$  так, что число 2021 можно



прочсть (по горизонтали, вертикали или диагонали, причем в любом направлении) более чем 30 способами. Могут ли слова барона быть правдой?

*О. Медведь*

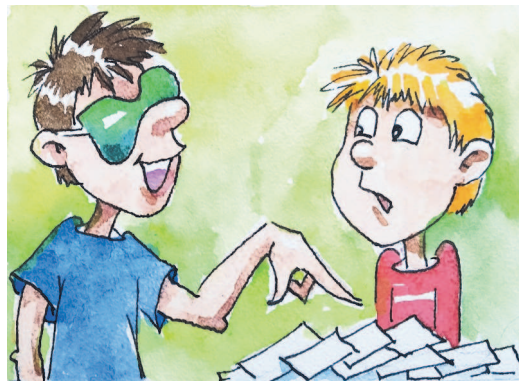
2. Федя согнул листок бумаги по прямой линии, затем полученную фигуру согнул по другой прямой еще один раз, а потом проткнул ее иголкой. Когда он развернул листок обратно, у него получилось четыре дырки. Докажите, что через все эти дырки Федя может провести либо одну прямую, либо одну окружность.

*М. Волчкевич*



Эти задачи предлагались на XXVI Турнире математических боев имени А.П.Савина.

3. Имеется 100 карточек с номерами 1, 2, ..., 100. Номера напечатаны так, что для Пети они невидимы, а для Васи видимы сквозь специальные очки. За



одну попытку Петя разбивает карточки на пары, а Вася указывает все пары с нечетной суммой номеров. За какое наименьшее число попыток Петя сможет наверняка разложить все карточки на пары с нечетной суммой?

*А. Шаповалов*

4. Буквами В, Д, Е, И, Р, С, Т, Ъ, Я зашифрованы разные цифры, причем так, что число, зашифрованное словом ТРИДЕВЯТЬ, делится на 27, а число, зашифрованное словом ТРИДЕСЯТЬ, делится на 30. Какую цифру обозначает буква С, если буква В обозначает тройку?

*С. Токарев*



# Что такое шпунтик?

С. ДВОРЯНИНОВ

**Д**А, ИМЕННО ЭТОТ ВОПРОС МОЖЕТ возникнуть у читателей замечательной книжки Николая Носова «Приключения Незнайки и его друзей». Герои этой сказки носят говорящие имена. Каждое имя указывает на характер персонажа или на род его занятий. Пилюлькин – врач Цветочного города, Тюбик – художник, Гуся – музыкант (гусли – это старинный музыкальный инструмент). Все ясно про Ворчуна и Молчуна. О любителях сладкого говорят имена Пончик и Сиропчик. Два друга Винтик и Шпунтик – изобретатели, мастера на все руки: и по металлу могут работать, и по дереву. С винтиком все понятно – это цилиндр с резьбой, который заворачивают и отворачивают отверткой, он служит для соединения различных деталей. Есть еще винт-пропеллер у самолета, гребной винт у моторной лодки. А вот со шпунтиком в повседневной жизни мы имеем дело не часто. Это уменьшительное слово происходит, очевидно, от слова *шпунт*. Вот о нем и поговорим.

Заметим сразу, что винтик – это отдельный предмет, он может существовать сам по себе. В упомянутой книжке потом появляются Шурупчик и Гвоздик. Можно подумать, что автор мог бы назвать коротышку Болтиком. Но корень этого слова – болт, и тогда сразу вспоминается глагол *болтать*, существительное *болтун*, имеющие негативный смысловой оттенок. Болтик не годится, и поэтому появился Шпунтик.

Шпунт – это выступ на ребре доски, который входит в соответствующий ему паз другой доски, который тоже называется шпунтом (рис.1). Доска со шпунтом называется шпунтованной. Такими досками настилают пол. Пол из отдельных досок в результате получается цельным. Даже если уложенные доски немного рассохнутся, то и в этом случае сквозных щелей не получится. Часто и сам этот способ соединения деталей назы-



Рис. 1

вают шпунтом (немецкое слово *Spund* означает пробка, затычка).

Примечательно, что в наши дни на деле со шпунтом знакомы многие дети, играющие в лего (рис.2). Компания LEGO Group появилась в 1932 году. Ее основателем стал датчанин Оле Кирк Кристиансен, в то время работавший бригадиром плотников и столяров. Вот он и догадался сделать шпунтовое соединение основой столь популярной ныне игрушки.

Производственные мощности фирмы расположены в разных странах. Главный завод находится в Дании, где в цехах длиной до полукилометра стоят ряды автоматов, штампующих около 21 млрд кубиков в год. На это уходит порядка 60 тонн пластика в день.

Хорошо известно, что «Буратино» Алексея Толстого – это вариант книги Карло Коллоди про Пиноккио. Так и Винтик со Шпунтиком подтолкнули писателя Станислава Сахарнова написать свою сказку про двух других друзей-мастеров. В 1959 году была издана книжка «Гак и Буртик в стране бездельников», герои которой возвращаются в свою родную страну не на воздушном



Рис. 2



Рис. 3



Рис. 5



Рис. 4

шаре, а на построенной ими ракете. Имя Гак созвучно гайдаровским Чуку и Геку, а откуда Буртик? Предлагаем вам разобраться с этим самостоятельно.

## В поисках ОПТИМАЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

(из мемуаров барона Мюнхгаузена)

**Д**РУЗЬЯ МОИ, ВЫ, БЕЗУСЛОВНО, слышаны о моей любви к геометрии! А в геометрии – к задачам на построение. А в задачах на построение – к построениям наименьшим числом линий. Такие построения

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210904>

Не надо думать, что шпунт распространился только на детские игрушки. С 1910 года в строительстве применяется шпунт Ларсена (рис.3). Все шпунтины здесь одинаковы, одна соединяется с другой замком, подобно тому как разомкнутые кольца соединяются в цепь любой длины. Если цепь натянута, то ни одно кольцо извлечь нельзя.

Шпунтом Ларсена укрепляют берега водоемов, насыпей, котлованов, он образует прочную вертикальную стенку (рис.4). При этом соединение отдельных шпунтин похоже на соединение кусочков пазла, когда один въезжает в другой (рис.5). Такие пазлы появились в 1909 году.

ния часто называют *оптимальными*. Еще одна моя страсть – это путешествия на Луну! Во время таких путешествий я охотно рассказываю местным жителям о красивых задачах и теоремах геометрии, обучаю их оптимальным построениям.

Так, во время первого путешествия на Луну мы занимались построениями с помощью одной линии. Напомню, что задачи на построение выполняются циркулем и линейкой без делений, а линией называется прямая, луч, отрезок, окружность или ее частичка в виде засечки. Из построений одной линией жителям Луны особенно понравилась такая задача: на прямой  $l$  отложен угол, равный  $\alpha$  (рис.1), и надо одной линией построить угол, равный данному. Мы вместе

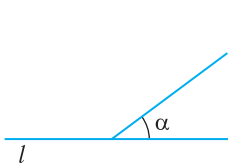


Рис. 1

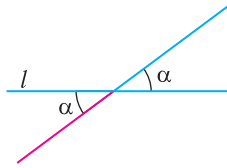


Рис. 2

с лунянами улынулись и выполнили построение (рис.2).

В дальнейшем я тоже буду демонстрировать решения задач либо рисунком, либо ссылаясь на важные факты геометрии, которые жители как Луны, так и Земли должны знать!

Во время моего второго путешествия на Луну мы изучали оптимальные построения уже двумя линиями. В качестве примеров предложу вот такие две задачи.

**Задача 1.** Дан угол, равный  $108^\circ$ . Двумя линиями постройте угол, составляющий  $\frac{1}{3}$  данного угла.

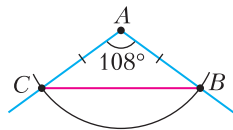


Рис. 3

**Решение.** Пусть угол с вершиной  $A$  равен  $108^\circ$ . Первая линия – окружность с центром в  $A$  произвольного радиуса. Она пересекает стороны угла, скажем, в точках  $B$  и  $C$  (рис.3).

Вторая линия – отрезок  $BC$ . Так как  $\triangle ABC$  равнобедренный, то  $\angle B = \angle C = 36^\circ$ , что составляет  $\frac{1}{3}$  угла  $108^\circ$ .

**Задача 2.** Приведите пример угла, который можно разделить на три равные части, проведя не более двух линий.

**Решение.** Это угол, равный  $270^\circ$  (рис.4).

Так вот, друзья мои, совсем недавно я возвратился на Землю после своего третьего путешествия на Луну, где мы, естественно, выполняли оптимальные построения с помощью трех

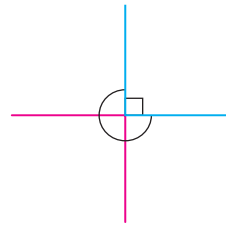


Рис. 4

линий. Жители Луны покорили меня достойными знаниями и хорошим чувствованием геометрических построений. О задачах, наиболее им приглянувшимся, я поведу дальнейший рассказ.

**Задача 3.** Дана прямая  $l$ . Тремя линиями постройте угол, равный  $30^\circ$ .

**Решение.** Первая линия: окружность  $\omega$  любого радиуса с центром  $O$  на прямой  $l$ . Пусть она пересекает  $l$  в точках  $A$  и  $B$  (рис.5). Вторая линия: засечка из точки  $B$  этим же радиусом дает на  $\omega$  точку  $C$ . Третья линия: отрезок  $AC$ . Тогда угол  $CAB$  равен

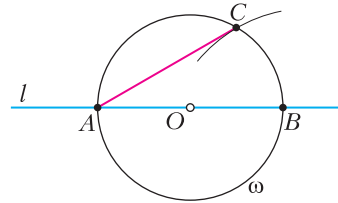


Рис. 5

$30^\circ$ , поскольку  $BC = R_\omega$ ,  $AB = 2R_\omega$ . При этом угол  $ACB$  равен  $90^\circ$ , а катет, лежащий против угла... ой-ой-ой, я обещал так много не говорить!

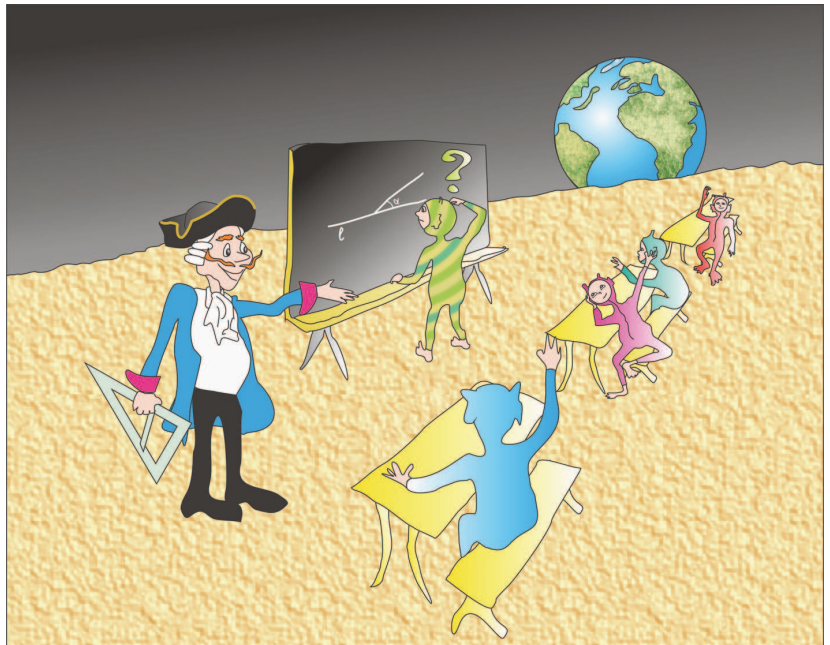


Рисунок Лейлы Наврозашивили

**Задача 4.** Дан квадрат  $ABCD$ . Проведя не более трех линий, постройте угол, равный  $15^\circ$ .

**Решение.** Первые две линии – засечки из вершин  $A$  и  $D$  радиусом, равным стороне квадрата. Пусть эти засечки пересекаются в точке  $K$  (рис.6). Третья линия – отрезок  $BK$ . Тогда  $\angle KBC = 15^\circ$ . Это нетрудно показать, так как  $\triangle AKD$  равнобедренный и  $\angle KAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Значит, в равнобедренном треугольнике  $AKB$  углы при основании...

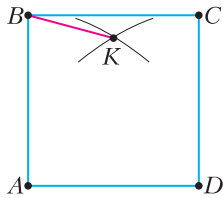


Рис. 6

**Задача 5.** Дана прямая  $l$  и точка  $N$  на ней. Проведя ровно три линии, восставьте перпендикуляр из точки  $N$  к прямой  $l$ .

**Решение.** Из любой точки  $F$  как из центра радиусом, равным  $FN$ , проводим окружность  $\omega$ . Пусть она вторично пересекает прямую  $l$  в точке  $T$  (рис.7). Вторая линия –

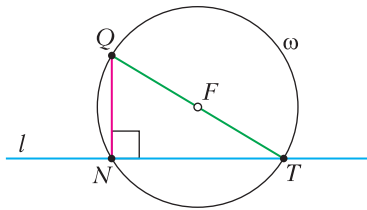


Рис. 7

луч  $TF$ , пересекающий второй раз  $\omega$  в точке  $Q$ . Третья линия – отрезок  $QN$ , который будет перпендикулярен прямой  $l$ . Подумайте, друзья мои, почему.

**Задача 6.** Дана прямая  $l$  и точка  $N$  вне прямой. Тремя линиями проведите через  $N$  прямую параллельно  $l$ .

**Решение.** Из любой точки  $K$  прямой  $l$  как из центра строим окружность  $\omega$  радиуса  $KN$ . Пусть она пересекает  $l$  в точках  $A$  и  $B$  (рис.8). Вторая линия: из точки  $A$  раствором циркуля, равным  $BN$ , делаем засечку на  $\omega$  – получаем точку  $P$ . Прямая  $PN$  будет

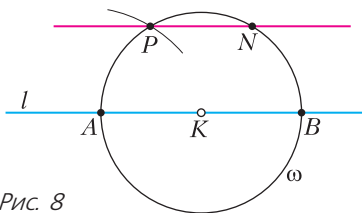


Рис. 8

параллельна прямой  $l$ . Почему? (Не забудьте, что хорды  $BN$  и  $AP$  равны!)

**Задача 7.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$  с указанной серединой  $D$  его стороны  $BC$ . Проведя не более трех линий, постройте точку  $H$  пересечения высот (ортоцентр) треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Первая линия – окружность  $\omega$  с центром в точке  $D$  радиуса  $DB = DC$ . Пусть  $\omega$  пересекает стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $P$  и  $T$  соответственно (рис.9). Поскольку

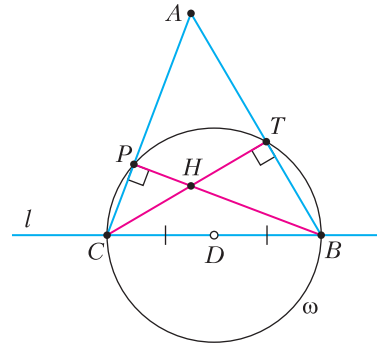


Рис. 9

$\angle BPC = \angle BTC = 90^\circ$ , то отрезки  $BP$  и  $CT$  – соответственно, вторая и третья линии, которые пересекаются в ортоцентре  $H$ .

**Задача 8.** Около треугольника  $ABC$  описана окружность  $\omega$ , центр которой не указан. Указаны точки  $L$  и  $Q$  – соответственно, основания внутренней и внешней биссектрис угла  $A$ . Проведя не более трех линий, постройте диаметр окружности.

**Решение.** Первая линия: продолжим луч  $AL$  до пересечения с  $\omega$  в точке  $N$  (рис.10). Вторая линия: луч  $QA$  при продолжении пересекает  $\omega$  в точке  $F$ . Третья линия:  $FN$  совпадает с диаметром  $\omega$ . Почему? (Покажите, что  $\angle LAQ = 90^\circ$ .)

**Задача 9.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$  с указанными ортоцентром  $H$  и центром описанной окружности – точкой  $O$ . Тремя линиями постройте три равных угла.

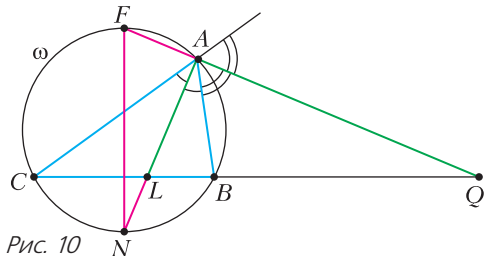


Рис. 10

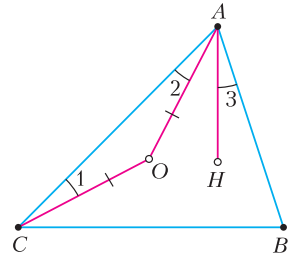


Рис. 11

**Решение.** Первая линия – отрезок  $AH$ . Вторая линия – отрезок  $AO$ . Третья линия – отрезок  $CO$  (рис.11). То, что  $\angle 1 = \angle 2$  – очевидно ( $AO = CO$  – радиусы описанной окружности треугольника  $ABC$ ). А вот почему  $\angle 2 = \angle 3$  – докажите! (Мои друзья-математики называют такие прямые, как  $AH$  и  $AO$ , *изогоналями*.)

**Задача 10.** Дана окружность с центром  $O$ , описанная около треугольника  $ABC$ ,  $AF$  – ее диаметр. Точка  $M$  – центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника  $ABC$ . Проведя не более трех линий, постройте ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Скажу вам, друзья мои, что это, пожалуй, самая сложная задача. Я рискнул предложить ее жителям Луны лишь после того, как поведал им о моем выдающемся друге – Леонарде Эйлеру! Ведь именно он, а не кто-нибудь другой, доказал, что точки  $O$ ,  $M$  и  $H$  лежат на одной прямой – *прямой Эйлера*! К тому же моих лунных подопечных изумил такой важный факт геометрии треугольника: расстояние от центра описанной окружности до стороны в 2 раза меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины. В обозначениях рисунка 12 это выглядит так:

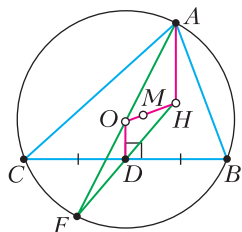


Рис. 12

$OD = \frac{1}{2} AH$ . Постарайтесь самостоятельно доказать это интересное, полезное утверждение! И тогда станет очевидным, что

луч  $FD$  проходит через ортоцентр  $H$ . После сказанного мной решить задачу для лунных жителей уже не составило труда.

*Первая линия:* луч  $AM$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$  – ее середине (рис.13).

*Вторая линия:* луч  $FD$ , который проходит через точку  $H$ .

*Третья линия:* прямая  $OM$ , которая со-

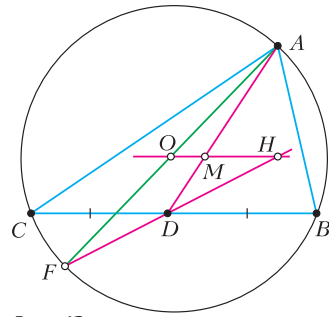


Рис. 13

впадает с прямой Эйлера. Она пересекает луч  $FD$  в ортоцентре  $H$ .

Если не устали, друзья мои, с удовольствием предложу три задачи на построение тремя линиями – для самостоятельного решения!

**Задача 11.** Дана прямая  $l$  и точка  $N$  вне этой прямой. Тремя линиями проведите перпендикуляр из точки  $N$  к прямой  $l$ .

**Задача 12.** Окружности  $\omega$  и  $s$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через  $A$  проведена произволь-

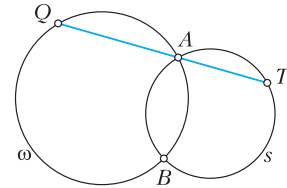


Рис. 14

ная секущая  $TQ$  (рис.14). Проведя три линии, постройте два параллельных отрезка.

**Задача 13.** Дан треугольник  $ABC$  с указанными центрами описанной и вписанной в него окружностей – точками  $O$  и  $I$  соответственно (рис. 15). Проведя три линии, постройте окружность, описанную около треугольника  $BIC$ .

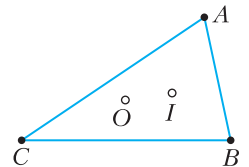


Рис. 15

*Со слов барона Карла Фридриха Иеронима фон Мюнхгаузена записал Г.Филипповский*

*От редакции.* Всем, кому нравятся задачи на поиск оптимальных геометрических построений, рекомендуем игру Euclidea (сайт euclidea.xyz).

# Фазовые диаграммы колебательных систем

Ф. БЕЛОВ

**Б**ОЛЬШИНСТВО ШКОЛЬНИКОВ старших классов знакомы с классическими примерами гармонических осцилляторов – системами, параметры которых подчиняются уравнению

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

и определяются гармонической функцией (решением этого уравнения)

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ либо } x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Широко известны колебания математического маятника, груза на пружине, ареометра на поверхности жидкости, жидкости в сообщающихся сосудах, заряженной бусинки на стержне между двумя закрепленными зарядами. Все они описываются одним и тем же уравнением и отличаются лишь параметром  $x$ , которым может быть любая отклоняющаяся от своего значения в положении устойчивого равновесия величина. Но есть и менее известные примеры. Так, в статье В. Можая «Колебания» («Квант», 1981, № 3) рассматриваются колебания тонкого (с распределенной по его кольцу массой) обруча радиусом  $r$ , движущегося без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиусом  $R > r$ , и колебания массивного поршня, закрывающего сосуд с газом, в изотермическом процессе. Я. Смородинский в статье «Похожие движения» («Квант», 2002, № 3) описывает решение задачи о движении тела по туннелю в Земле. Во всех этих случаях применение законов механики либо термодинамики приводят к уравнению гармонического осциллятора.

Традиционно используются динамический и энергетический подходы к таким задачам. А вот графические интерпретации связей

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210905>

параметров колебательных систем часто обходят стороной, хотя они оказываются очень полезными при решении различных задач, которые иными способами будут решаться долго и сложно. Речь идет о фазовых диаграммах колебательных систем.

Не уточняя конкретику колебательной системы, рассмотрим совместно решение уравнений гармонического осциллятора для координаты и скорости ее изменения (заметим, что координата может быть и углом отклонения математического маятника, и уровнем погружения ареометра, и численностью популяции хищников или жертв в биологической системе). Не теряя общности, остановимся на варианте, когда координата определяется функцией синуса (это случай запуска колебаний с помощью толчка системы из положения равновесия):

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$v = x' = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2. \quad (2)$$

Очевидно, что (2) является уравнением эллипса в координатах  $(x; v)$  или окружностью радиусом  $A$  с центром в точке  $(0; 0)$  в координатах  $(x; v/\omega)$ . Иными словами, множество пар значений координаты и скорости при колебаниях системы будет геометрическим местом точек, равноудаленных на расстояние амплитуды колебаний от начала координат. Возникшими особенностями геометрического аспекта нельзя не воспользоваться. Очень часто геометрические и графические интерпретации физических процессов оказываются существенно удобнее и рациональнее при решении конкретных задач, чем трудоемкие алгебраические выкладки. К такому же уравнению (2) мы придем, если запишем закон сохранения энергии. Например, для груза массой  $m$ , совершающего колебания на пружине жесткостью  $k$ , закон сохранения энергии может быть записан следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

После очевидного упрощения, с учетом соотношения  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , получим уравнение (2).

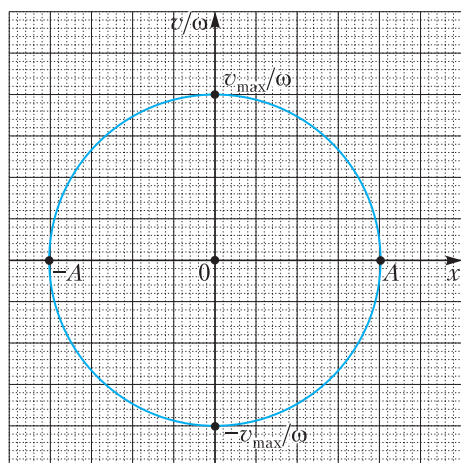


Рис. 1

Построим обнаруженную окружность в координатах  $(x; v/\omega)$  (рис.1). Такое построение и носит название фазовой диаграммы. Точки пересечения окружности с осью ординат соответствуют переходу системы через положение равновесия, где скорость объекта максимальна (например, для математического маятника это моменты времени, когда грузик пролетает нижнюю точку). Точки пересечения с осью абсцисс – моменты, когда тело находится в положении максимального отклонения от равновесия и не имеет скорости, а его координата равна по модулю амплитуде.

Перебор всех точек построенной окружности происходит для колебательной системы в течение периода колебаний. Неважно, из какой точки мы начинаем движение по окружности (от этого будет зависеть начальная фаза колебаний  $\varphi_0$ ), в процессе изменения координат  $(x; v/\omega)$  будут пройдены все значения отклонений и скоростей колеблющегося тела. Кроме того, можно заметить, что движение точки по фазовой диаграмме происходит обязательно по часовой стрелке. Действительно, выводя математический маятник из положения равновесия в точку с координатой  $x = A$ , мы обеспечим нарастающую по модулю отрицательную проекцию скорости, т.е. будем наблюдать перебор точек фазовой диаграммы в четвертой координатной четверти и далее. Аналогичным образом можно убедиться, что при любом начальном положении точка фазовой диаграммы будет равномерно перемещаться по часовой стрелке.

Интересно также, что равномерное движение точки по фазовой диаграмме происходит с

угловой скоростью  $\omega$ , так как с такой частотой меняются координата и скорость. Поэтому угловые расстояния между точками фазовой диаграммы пропорциональны времени, которое колебательная система затрачивает на соответствующее изменение параметров.

Некоторые общие идеи о применении фазовых диаграмм для описания колебаний математического маятника и других систем можно найти в статье А.Веселова «О математике гармонических колебаний» («Квант», 1986, № 5). Однако чаще геометрические интерпретации колебательных систем приводят к более известному методу векторных диаграмм, как, например, в статье А.Кикоина «Гармонические колебания. Сложение колебаний» («Квант», 1984, № 9).

Покажем на конкретных примерах возможности, которые дает применение фазовых диаграмм в различных ситуациях.

**Задача 1.** Груз массой 100 г, закрепленный на пружине жесткостью 10 Н/м, может совершать колебания в горизонтальном направлении по гладкой плоскости. На расстоянии 10 см от положения груза при недеформированном состоянии пружины стоит неподвижная стена. С каким периодом будет совершать колебания груз, если отвести его в противоположном стене направлении на расстояние 20 см от положения равновесия? Удар груза о стену абсолютно упругий.

Решение этой задачи координатным методом не слишком трудоемко. Действительно, при отсутствии стены координата менялась бы по закону

$$x = -0,2 \cos \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$  рад/с, а ось  $x$  направлена к стене. Для решения вопроса об изменении периода в силу наличия стены достаточно определить время, в течение которого координата менялась бы от значения  $x = 0,1$  м до значения  $x = 0,2$  м:

$$t_1 = \frac{T}{2\pi} \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{T}{3},$$

$$t_2 = \frac{T}{2\pi} \arccos(-1) = \frac{T}{2} \text{ и } \Delta t = \frac{T}{6},$$

где  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  – полный период колебаний в



отсутствие стены. Тогда искомый период равен

$$T - 2\Delta t = \frac{2T}{3} = 0,42 \text{ с.}$$

Однако графическая интерпретация колебаний дает результат практически мгновенно. Колебания начинаются из точки с фазовыми координатами  $\left(x = -0,2 \text{ м}; \frac{v}{\omega} = 0\right)$ , в точке с абсциссой  $x = 0,1 \text{ м}$  встречается стена, которая благодаря абсолютно упругому удару меняет скорость тела на противоположную по направлению. Соответственно, в этот момент на фазовой плоскости происходит мгновенный скачок по вертикали в точку, симметричную относительно оси абсцисс (рис.2). Показанная пунктиром на диаграмме часть окружности выпадает из геометрического места точек, имеющих координатами параметры груза в разные моменты времени. В дальнейшем колебания происходят по части диаграммы, показанной сплошной линией. Выделенные на рисунке центральные углы, очевидно, равны  $\frac{\pi}{3}$ , значит, период колебаний, пропорциональный угловой мере проходимой дуги, будет равен

$$T - \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3}T = 0,42 \text{ с,}$$

где  $T$  – полный период колебаний в отсутствие стены (соответствующий перемещению точки фазовой плоскости по полной окружности).

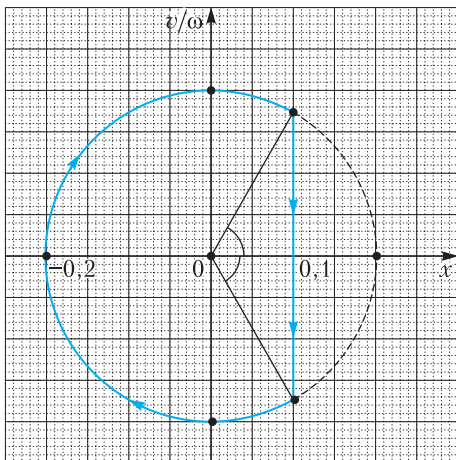


Рис. 2

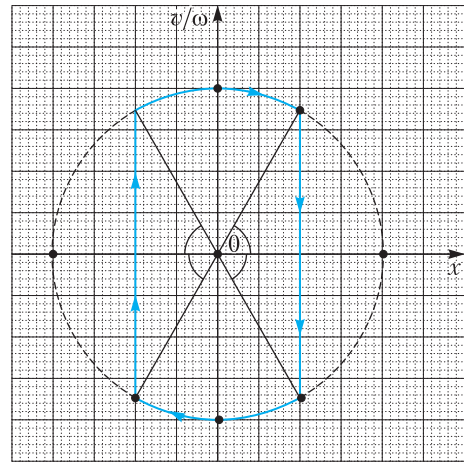


Рис. 3

Аналогичная фазовая диаграмма получится и в случае колебаний математического маятника, сталкивающегося упруго со стеной в одной из точек своей траектории. Если математический маятник разместить между двумя упругими стенками, ограничивающими его колебания, мы получим вырезку двух дуг из окружности (рис.3) и сможем в зависимости от условий системы аналогично определить период колебаний по угловой мере дуги, показанных сплошной линией.

Здесь появляется повод поговорить о зависимости и независимости периода колебаний от амплитуды. Мы привыкли отмечать, что период колебаний пружинного или математического маятника в случае малых колебаний (когда и справедливо уравнение (1)) не зависит от амплитуды. Этот факт следует из всех решений уравнения гармонического осциллятора и легко проверяется экспериментально. Однако, при условии движения с ограничениями в виде стенок или иных препятствий полное время колебаний, очевидно, будет зависеть от амплитуды. Например, на рисунке 4 представлено семейство фазовых диаграмм, аналогичных показанной на рисунке 2. В зависимости от того, на какое расстояние груз отведен вначале, столкновение с неподвижной стеной произойдет раньше или позже (или вообще не произойдет). Соответственно, и градусная мера дуги окружности, по которой перемещается точка фазовой плоскости, может быть различной. Этот факт может показаться неожиданным, но при неизменности

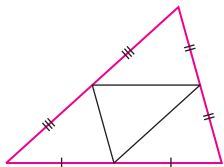
(Продолжение см. на с. 34)

# Посмотрим на чертеж с разных сторон

В древности было принято представлять факты элементарной геометрии в виде чертежей, без текста. В таком же ключе написана очень популярная среди школьников книжка А. Акопяна «Геометрия в картинках» (МЦНМО, 2017). Многие преподаватели используют в своей практике решение задач по готовым чертежам. Но некоторые чертежи можно интерпретировать по-разному, т.е. на одном и том же чертеже можно увидеть различные факты.

Приведем ряд примеров, начав с самых простых. Обоснования сформулированных фактов в большинстве случаев понятны из пометок на чертежах, но иногда потребуют кратких комментариев.

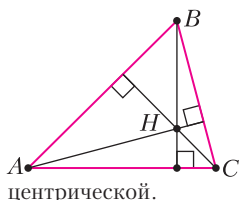
1. а) Средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника, подобных исходному с коэффициентом 0,5.



б) Если через каждую вершину треугольника провести прямую, параллельную противоположной стороне, то точки попарного пересечения прямых образуют треугольник, подобный исходному с коэффициентом 2.

Такой треугольник иногда называют «удвоенным».

2. а) Точка  $H$  – точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника  $ABC$ .

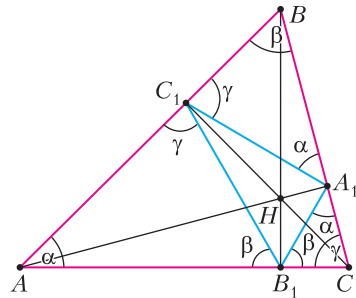


б) Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  – ортоцентры треугольников  $BHC$ ,  $AHC$  и  $AHB$  соответственно.

Четверку точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $H$  называют ортоцентрической.

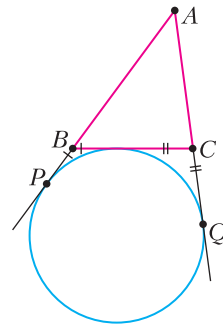
3. а) Ортоцентр  $H$  остроугольного треугольника  $ABC$  является точкой пересечения биссектрис (центром вписанной окружности) его ортотреугольника  $A_1B_1C_1$ .

б) Вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  остроугольного треугольника являются центрами вневписанных окружностей для его ортотреугольника  $A_1B_1C_1$ .



Равенство углов, которые обозначены одинаковыми буквами, следует из того, что четырехугольники  $ABA_1B_1$ ,  $BCB_1C_1$  и  $CAC_1A_1$  являются вписанными. Используется также, что биссектрисы внутренних и внешних углов треугольника перпендикулярны.

4. а) Если  $P$  и  $Q$  – точки касания вневписанной окружности треугольника  $ABC$  с продолжениями сторон  $AB$  и  $AC$ , то отрезки  $AP$  и  $AQ$  равны полупериметру треугольника  $ABC$ .



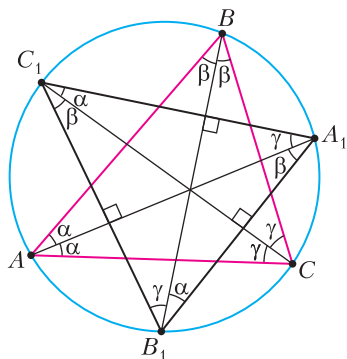
б) Пусть  $P$  и  $Q$  – точки касания окружности, вписанной в угол с вершиной  $A$ , тогда периметр треугольника, отсекаемого от угла касательной к окружности, проходящей между точками  $A$  и  $P$ , не зависит от выбора касательной.

Для доказательства используется равенство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

5. а) Точки пересечения продолжений биссектрис треугольника  $ABC$  с его описанной окружностью являются вершинами треугольника  $A_1B_1C_1$ , в котором прямые  $A_1A$ ,  $B_1B$  и  $C_1C$  содержат высоты.

б) Точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника  $ABC$  с его описанной окружностью являются вершинами

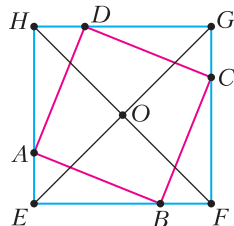




ми треугольника  $ABC$ , в котором лучи  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  являются биссектрисами углов.

Для обоснования используется равенство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, а также теорема о сумме углов треугольника. Из сформулированных утверждений следует, что центр вписанной окружности (инцентр) треугольника  $ABC$  совпадает с ортоцентром треугольника  $A_1B_1C_1$ .

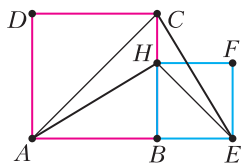
6. а) Прямоугольник  $EFGH$ , описанный около квадрата  $ABCD$ , является квадратом с тем же центром  $O$ .



б) Биссектриса прямого угла  $E$  треугольника  $ABE$  проходит через центр  $O$  квадрата, построенного на гипотенузе  $AB$ .

Утверждение а) следует, например, из равенства прямоугольных треугольников, а утверждение б) – его следствие после соответствующего дополнительного построения.

7. а) Квадраты  $ABCD$  и  $BEFH$  одинаково ориентированы и расположены так, что точка  $H$  лежит на отрезке  $BC$ . Тогда отрезки  $AH$  и  $CE$  равны и перпендикулярны.



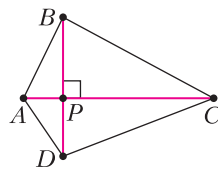
б) Диагонали  $AH$  и  $CE$  невыпуклого четырехугольника  $ACHE$ , в котором углы  $A$ ,  $C$  и  $E$  равны по  $45^\circ$ , равны и перпендикулярны.

Оба факта можно получить поворотом с центром  $B$  на  $90^\circ$ . Отметим также, что точка  $H$  является ортоцентром треугольника  $ACE$ .

Квадраты, расположенные указанным образом, иногда называют «сцепленными».

8. а) Геометрическим местом точек, у которых разность квадратов расстояний до

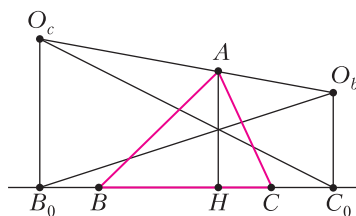
концов отрезка постоянна, является прямая, перпендикулярная этому отрезку.



б) Диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

Оба утверждения следуют из принципа Карно, который в данных обозначениях формулируется так:  $BA^2 - BC^2 = PA^2 - PC^2$  тогда и только тогда, когда  $BP \perp AC$ .

9. а) Высота  $AH$  треугольника  $ABC$  является средним гармоническим радиусов вневписанных окружностей, касающихся сто-



рон  $AB$  и  $AC$ .

б) Пусть  $O_b$  и  $O_c$  – центры вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ , касающихся сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $B_0$  и  $C_0$  – точки касания этих окружностей с прямой  $BC$ . Тогда прямые  $O_bB_0$  и  $O_cC_0$  пересекаются на середине высоты  $AH$  этого треугольника.

Утверждение а) следует из цепочки равносильных равенств, из которых последнее очевидно:

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c} \Leftrightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} \Leftrightarrow a = p - b + p - c \Leftrightarrow 2p = a + b + c.$$

Утверждение б) можно получить как следствие а), если использовать, что в трапеции  $O_bC_0B_0O_c$  отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, является средним гармоническим оснований  $O_bC_0$  и  $O_cB_0$ .

Отметим также, что  $BB_0 = p - BC = CC_0$ , поэтому  $BC_0 = CB_0$ .

Надеемся, что читатели найдут и другие примеры.

Материал подготовил А.Блинков

(Начало см. на с. 29)

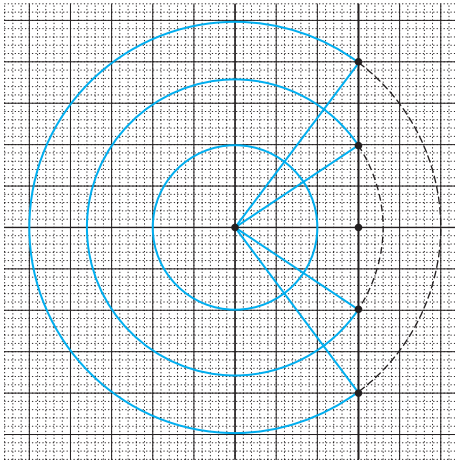


Рис. 4

общего периода свободных колебаний системы без ограничений время попадания в фиксированную точку, не совпадающую с положением равновесия или крайнего отклонения, действительно будет зависеть от амплитуды.

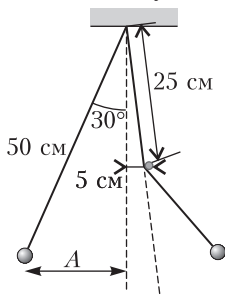


Рис. 5

**Задача 2.** Математический маятник на нити длиной  $l = 50$  см совершает колебания в вертикальной плоскости вдоль стены, в которую вбит гвоздь на расстоянии 25 см от точки подвеса и 5 см от вертикали, проходящей через точку подвеса (рис.5). Определите период колебаний маятника, если отклонение маятника в сторону, противоположную той части, где вбит гвоздь, происходит на максимальный угол  $30^\circ$ .

Предполагая, что маятник совершает малые колебания (при максимальном отклонении  $30^\circ$  это допустимо), отметим, что амплитуда отклонения груза на первом этапе движения равна  $A_1 = \frac{1}{2}l = 25$  см, а колебания происходят с частотой  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . В момент, когда нить достигает гвоздя, координата груза равна  $x_1 = \frac{5}{25}l = 10$  см. После этого движение соответствует части колебаний с частотой  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l/2}} = \sqrt{2}\omega_1$ . Следовательно, в

этот момент величина  $v/\omega$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз, а положение равновесия смещается в точку с абсциссой 5 см.

Построим, с учетом всего сказанного, фазовую диаграмму, которая очевидно будет состоять из частей двух окружностей (рис.6). Первая окружность имеет центр в начале координат и радиус  $A_1$ , вторая – центр в точке с координатами  $(5; 0)$  и радиус

$$A_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\omega_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 - x_1^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}A_1^2 - \frac{1}{4}x_1^2} = \sqrt{\frac{23}{50}}A_1 \approx 17 \text{ см.}$$

Искомый общий период колебаний такой системы определяется угловыми мерами дуг окружностей, которые показаны на фазовой диаграмме сплошной линией:

$$T = \frac{2\pi - 2\varphi_1}{2\pi}T_1 + \frac{2\varphi_2}{2\pi}T_2 = T_1 - \frac{\varphi_1}{\pi}T_1 + \frac{\varphi_2}{\pi}T_2,$$

$$\varphi_1 = \arccos \frac{x_1}{A_1}, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{x_1}{2A_2},$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}, \quad T \approx 1,32 \text{ с.}$$

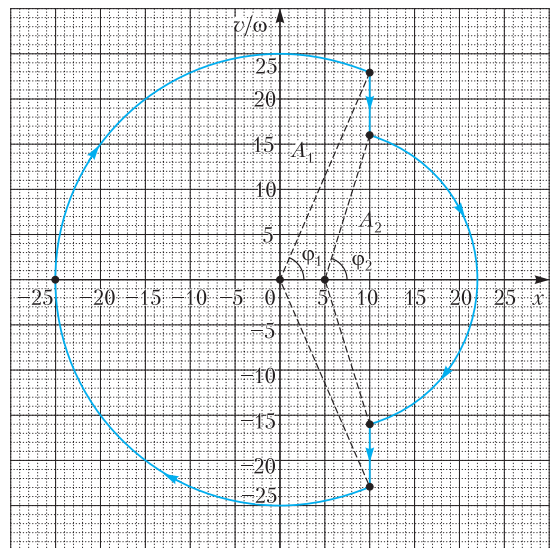


Рис. 6

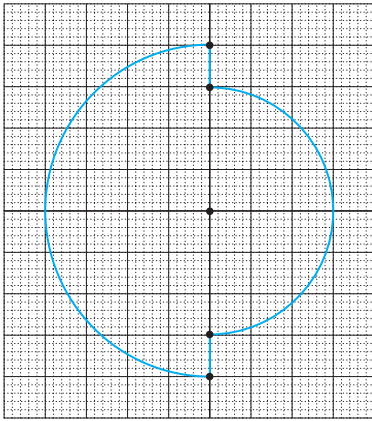


Рис. 7

Часто встречается более простая версия такой задачи, когда гвоздь располагается на одной вертикали с точкой подвеса. Ясно, что в этом случае период равен  $T = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$ , а фазовая диаграмма не оказывается необходимой, так как представляет собой тривиальный чертеж – две полуокружности с общим центром, но разными радиусами (рис.7).

**Задача 3.** Груз массой  $m$  падает без начальной скорости с высоты  $h$  на чашку пружинных весов, которая в начальный момент времени была неподвижна (рис.8).

Жесткость пружины  $k$ , масса чашки  $M$ . Определите амплитуду возникающих колебаний. Считайте, что удар груза о чашку неупругий и после столкновения чашка с грузом движутся как единое целое, но груз не прилипает к чашке. При какой начальной высоте  $h$  может произойти отрыв груза от чашки в верхней точке колебаний?

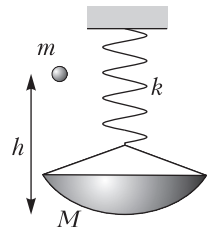


Рис. 8

Серия таких задач традиционно встречается при рассмотрении механических колебаний в разных пособиях. Чаще всего предлагается энергетический способ решения. Нельзя не привести его здесь для того, чтобы показать разницу в сравнении с вариантом решения с помощью фазовой диаграммы.

Перед столкновением с чашкой груз имеет скорость, определяемую законом сохране-

ния энергии для этапа его свободного движения:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}, \text{ и } v_1 = \sqrt{2gh}.$$

По закону сохранения импульса после удара чашка с грузом будут иметь другую скорость:

$$mv_1 = (m + M)v_2, \text{ и } v_2 = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh}.$$

Запишем закон сохранения энергии для этапа последующего движения чашки с грузом до момента максимального растяжения пружины:

$$(m + M)g\Delta x + \frac{(m + M)v_2^2}{2} + \frac{k\Delta x_0^2}{2} = \frac{k(\Delta x_0 + \Delta x)^2}{2},$$

где  $\Delta x_0$  – начальная деформация пружины, которая удерживает чашку, а  $\Delta x$  – смещение чашки с грузом до момента максимального растяжения. Обозначим  $\Delta x_1$  – деформацию пружины, соответствующую новому положению равновесия пружины с грузом.

Очевидно, что  $\Delta x_0 = \frac{Mg}{k}$ ,  $\Delta x_1 = \frac{(m + M)g}{k}$ , а искомая амплитуда колебаний  $A = \Delta x - (\Delta x_1 - \Delta x_0)$ . Решение уравнения относительно  $\Delta x$  приводит к следующему:

$$(m + M)g\Delta x + \frac{2m^2gh}{2(m + M)} + \frac{k\Delta x_0^2}{2} = \frac{k\Delta x_0^2}{2} + k\Delta x_0\Delta x + \frac{k(\Delta x)^2}{2},$$

$$mg\Delta x + Mg\Delta x + \frac{m^2gh}{m + M} = Mg\Delta x + \frac{k(\Delta x)^2}{2},$$

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} - mg\Delta x - \frac{m^2gh}{m + M} = 0,$$

$$\Delta x = \frac{mg}{k} \pm \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}},$$

$$A = \Delta x - (\Delta x_1 - \Delta x_0) = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}}.$$

Ответ на вопрос о том, при каких условиях груз сможет отрываться от чашки в верхней точке, требует определения ускорения системы в верхнем положении и сравнения его с

g. Но прежде, чем рассматривать эту часть задачи, давайте оценим красоту и рациональность варианта решения с помощью фазовой диаграммы.

Найти скорость чашки с грузом после удара, естественно, все равно придется:

$$v_2 = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gh}.$$

А также следует указать на отличие координаты чашки с грузом в момент удара от ее нового положения равновесия:

$$\Delta x_0 = \frac{Mg}{k}, \Delta x_1 = \frac{(m + M)g}{k}, \Delta x_1 - \Delta x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Определив направление оси  $x$  вниз и за начало отсчета выбрав новую точку равновесия, можем сказать, что построение диаграммы должно начинаться из точки с координатами  $\left(-\frac{mg}{k}; \frac{v_2}{\omega}\right)$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}}$ . Отсюда с очевидностью следует (рис.9), что искомая амплитуда – радиус окружности на фазовой плоскости – рассчитывается на основании теоремы Пифагора:

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\omega}\right)^2} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}}.$$

Читатель, наверное, согласится, что геометрическое построение в данном случае существенно легче, чем оценка энергетических параметров системы. Заметим, что в рамках энергетического подхода к описанию подобной системы можно было бы не рас-

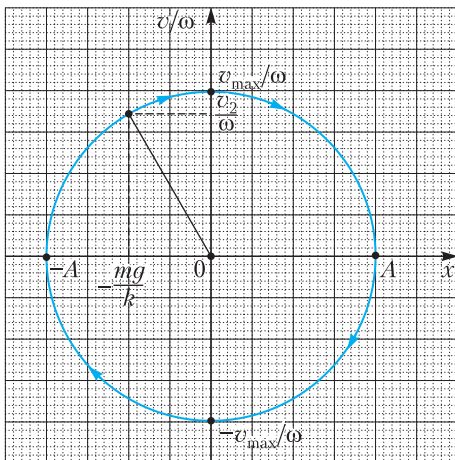


Рис. 9

сматривать отдельные потенциальные энергии элементов системы, а записать ее в целом как величину, пропорциональную квадрату отклонения от нового положения равновесия:  $\frac{k(\Delta x_1 - \Delta x_0)^2}{2}$ . Затем, суммируя с начальной кинетической энергией, приравнять к конечной потенциальной  $\frac{kA^2}{2}$  и тем самым обойти указанное выше объемное квадратное уравнение. Однако практика показывает, что подобное упрощение порой вызывает у школьников сложности в понимании, связанные с желанием все равно учитывать изменение гравитационной потенциальной энергии, чего делать в таком случае не надо. Построенная фазовая диаграмма, как мы полагаем, исключает неоднозначность в толковании потенциальной энергии и сопутствующие этому проблемы.

Высота  $h$ , при которой может наступить отрыв грузика от чашки в верхней точке, очевидно, определяется условием того, что ускорение системы в верхней точке превосходит  $g$ :

$$a = A\omega^2 = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}} \frac{k}{m + M} \geq g,$$

$$h \geq \frac{Mg(m + M)(2m + M)}{2mk^2}.$$

Интересно, что с помощью фазовых диаграмм легко описать поведение механической системы в случае затухания ее колебаний под действием сил трения.

**Задача 4.** На горизонтальной поверхности лежит грузик массой  $m = 1$  кг, соединенный с неподвижной вертикальной стеной горизонтальной невесомой пружиной жесткостью  $k = 10$  Н/м (рис.10). Коэффициент трения между грузиком и поверхностью  $\mu = 0,1$ . Пружина не деформирована. Грузику сообщают начальную скорость  $1,5$  м/с. Оцените время, которое занял процесс колебаний от начала движения грузика до полной его остановки.

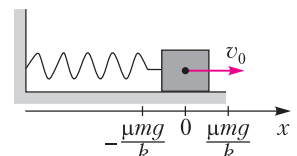


Рис. 10

Основной фактор, определяю-

ший вид фазовой диаграммы в данном случае, – наличие так называемой зоны застоя  $\left(-\frac{\mu mg}{k}; \frac{\mu mg}{k}\right)$ , в пределах которой возникающая сила упругости меньше максимальной силы трения покоя. Если груз попадает в эту зону с нулевой скоростью, то возможностей для преодоления ее у него не останется и колебания прекратятся.

Для построения соответствующей фазовой диаграммы запишем уравнение гармонического осциллятора с учетом силы трения. При движении груза вправо сила трения будет направлена противоположно оси  $x$ :

$$x'' + \frac{k}{m}x + \mu g = 0,$$

$$x'' + \frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right) = 0.$$

Тогда решением является, очевидно, функция

$$x = -\frac{\mu mg}{k} + A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Это означает, что дуга окружности  $CE$  (рис. 11), характеризующая этап движения в направлении оси  $x$ , будет построена с центром в точке  $A\left(-\frac{\mu mg}{k}; 0\right)$ . Радиус этой окружности равен

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

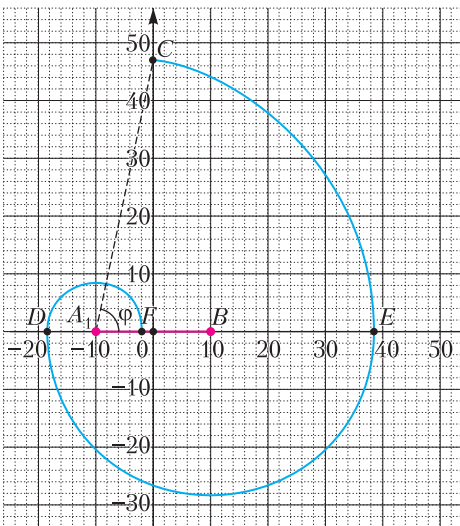


Рис. 11

В момент попадания груза в точку  $E$  фазовой диаграммы (точка крайнего правого отклонения от положения равновесия) меняются направление силы трения и знаки перед слагаемыми, ее характеризующими, в соответствующих уравнениях:

$$x'' + \frac{k}{m}x - \mu g = 0,$$

$$x'' + \frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) = 0,$$

$$x = \frac{\mu mg}{k} + A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Дуга окружности  $ED$ , характеризующая этап движения в направлении, противоположном оси  $x$ , будет построена с центром в точке  $B\left(\frac{\mu mg}{k}; 0\right)$ . Радиус этой окружности равен

$$A_2 = A_1 - 2\frac{\mu mg}{k}.$$

После этого все повторяется. Центр окружности постоянно перемещается между краями зоны застоя, амплитуда каждый раз сокращается на ширину зоны застоя, а количество витков получающейся спирали определяется начальным запасом энергии (т.е. радиусом первой дуги). В нашем случае спираль состоит из трех секций (в чем читатель может убедиться, проведя соответствующие расчеты). После попадания в зону застоя (точка  $F$ ) с нулевой скоростью тело не сможет выйти за ее пределы. Общее время движения складывается из частей периодов, определяемых угловыми мерами соответствующих дуг:

$$t = \frac{\varphi}{2\pi}T + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T,$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{v_0/\omega}{\mu mg/k}\right), T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, t \approx 4,4 \text{ с.}$$

Такого рода задачи часто встречаются в олимпиадах разного уровня. В качестве примера рассмотрим альтернативное авторское решение задачи финала олимпиады «Физтех» (10 класс, 2017 г.).

**Задача 5.** На наклонной под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 3/4$ ) к горизонту поверхности лежит брусок, прикрепленный к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (рис. 12). Коэффициент трения бруска о поверхность  $\mu = 1/6$ . Брусок отклоняют вниз

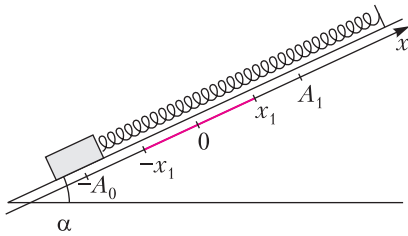


Рис. 12

вдоль поверхности на расстояние  $A_0 = 35$  см от точки 0, соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлинится на  $x_0 = 32$  см.

1) На каком расстоянии от точки 0 окажется брусок при первой остановке?

2) На каком расстоянии от точки 0 брусок остановится окончательно?

Авторский вариант решения предполагает обращение к закону сохранения энергии. Однако фазовая диаграмма здесь, как и во многих подобных ситуациях, дает более рациональный вариант решения. Учитывая представленные в задаче 4 рассуждения о виде уравнения гармонического осциллятора и смещении центра окружностей при построении диаграммы, мы можем ограничиться только оценкой самой ширины зоны застоя для того, чтобы построить соответствующую системе фазовую диаграмму. Как и в предыдущей задаче, она будет иметь вид сворачивающейся спирали. Для построения диаграммы, очевидно, следует определить зону застоя, начальную амплитуду и после элементарных расчетов оценить количество ветвей спирали.

В положении нуля выбранной оси брусок находится в равновесии при отсутствии трения. Значит, растяжение пружины в этот момент равно

$$\Delta l_0 = \frac{mg \sin \alpha}{k}.$$

Зона застоя  $(-x_1; x_1)$ , в пределах которой возникающая сила упругости не может преодолеть равнодействующую силы трения покоя и компоненту силы тяжести, определяется исходя из условий равновесия в ее

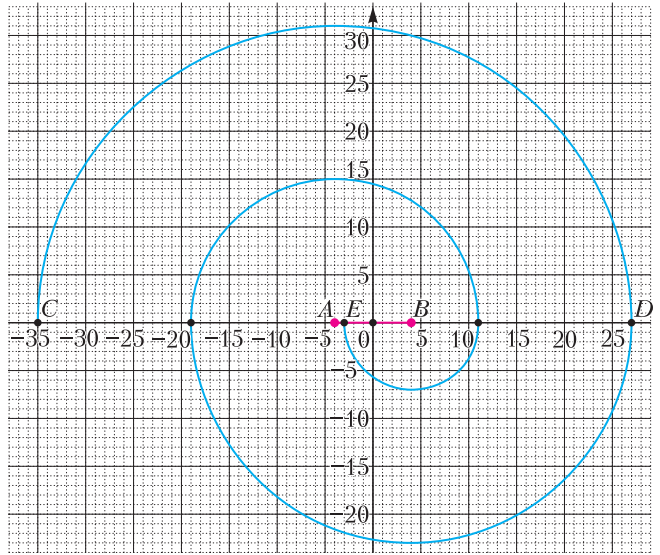


Рис. 13

крайних точках:

$$k(\Delta l_0 + x_1) = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha,$$

$$k(\Delta l_0 - x_1) = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha.$$

С учетом значения  $\Delta l_0$  получим

$$x_1 = \frac{\mu mg \cos \alpha}{k}.$$

По условию брусок, подвешенный на пружине вертикально, удлиняет ее на  $x_0 = 32$  см, значит,  $x_1 = \mu x_0 \cos \alpha = 4$  см, а ширина зоны застоя  $2x_1 = 8$  см. Тогда ответ на первый вопрос находится сразу:

$$A_1 = A_0 - 2x_1 = 27 \text{ см.}$$

А диаграмма колебания является спиралью из трех витков (рис. 13). В точке D (координата 27 см) брусок впервые поворачивает и начинает движение вниз, доходит до точки с координатой  $-(27 - 2x_1) = -19$  см, еще раз поворачивает и движется вверх в точку с координатой  $19 - 2x_1 = 11$  см, а последний раз на пути вниз попадает в точку с координатой  $-(11 - 2x_1) = -3$  см, где и останавливается, так как точка лежит в зоне застоя.

Подводя итог, сформулируем алгоритм применения метода фазовых диаграмм:

1) если уравнение зависимости координат фазовой плоскости не очевидно сразу, его необходимо получить, чтобы определить влияние внешних сил, увеличивающих или



уменьшающих амплитуду колебаний на каждом шаге;

2) определить начальную точку построения диаграммы и ее центр;

3) построить диаграмму в виде дуг окружностей или спирали;

4) сделать необходимые выводы о временных или пространственных параметрах системы на основании вида диаграммы и геометрических соотношений между отдельными ее элементами.

Для закрепления навыков построения фазовых диаграмм предлагаем читателю самостоятельно решить несколько задач, аналогичных рассмотренным выше.

### Упражнения

1. Постройте семейство фазовых диаграмм для колебаний груза массой  $m$ , висящего на упругом резиновом шнуре с коэффициентом упругости  $k$ . Определите вид диаграммы и область ее расположения в зависимости от значения начального расстояния, на которое отводят груз вниз для начала колебаний.

2. Груз массой  $m$  находится в состоянии равновесия на вертикальной пружине жесткостью  $k$ , прикрепленной к потолку. Снизу к грузу прикреплена такая же невесомая пружина, нижний конец которой расположен на расстоянии  $L$  от пола ( $L > mg/k$ ). Сверху на груз маятника падает кольцо массой  $m$  с высоты  $H$ . Постройте фазовую диаграмму колебаний системы. Определите период колебаний. Какие значения может принимать период колебаний в зависимости от высоты  $H$ ? Рассмотрите все возможные случаи.

3. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения  $\mu = 0,1$  находится брусок массой  $m = 1$  кг, соединенный горизонтальной недеформированной невесомой пружиной с вертикальной стеной. Жесткость пружины  $k = 0,1$  Н/см. Брусок сместили на расстояние  $l = 58,5$  см от положения недеформированного состояния пружины и отпустили без начальной скорости. Определите время, в течение которого брусок будет совершать затухающие колебания, и расстояние, на котором

он остановится от положения равновесия.

4. Груз массой  $m$  падает без начальной скорости с высоты  $h$  на чашку пружинных весов, которая в начальный момент времени была неподвижна (см. рис.8). Жесткость пружины  $k$ , масса чашки ничтожно мала. Определите амплитуду возникающих колебаний. Считайте, что удар груза о чашку неупругий и после столкновения чашка с грузом движутся как единое целое.

5. Кусочек пластилина массой  $m$  запускают вверх со скоростью  $v_0$ . На высоте  $h$  от точки броска он сталкивается с закрепленной на вертикальной пружине платформой, которая в начальный момент времени была неподвижна, и прилипает к ней. Жесткость пружины  $k$ , масса платформы  $M$ . Определите амплитуду возникающих колебаний.

6. Математический маятник на нити длиной  $l = 40$  см совершает колебания в вертикальной плоскости вдоль стены. Под точкой подвеса на расстоянии  $\Delta l = 30$  см от нее вбит гвоздь. Определите период колебаний маятника.

7. Математический маятник на нити длиной  $l$  совершает колебания в вертикальной плоскости вдоль стены, в которую вбит гвоздь на расстоянии  $\Delta l$  от точки подвеса и  $\Delta x$  от вертикали, проходящей через точку подвеса. Определите период колебаний маятника, если отклонение маятника в сторону, противоположную той части, где вбит гвоздь, превосходит на максимальный угол  $\varphi$ . Считайте колебания малыми.

8 (финал олимпиады «Физтех», 10 класс, 2017 г.). На наклоненной под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 3/4$ ) к горизонту поверхности лежит брусок, прикрепленный к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (см.рис.12). Коэффициент трения бруска о поверхность  $\mu = 2/7$ . Брусок отклоняют вниз вдоль поверхности на расстояние  $A_0 = 41$  см от точки 0, соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлинится на  $x_0 = 28$  см.

1) На каком расстоянии от точки 0 окажется брусок при первой остановке?

2) В какой точке брусок остановится окончательно?

### Внимание наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# Апельсины, канализационные люки и разрезание длинного прямоугольника

**А. АКОПЯН**

К праздничному столу апельсины часто режут круглыми дольками (рис. 1). Обычно все дольки имеют одинаковую толщину, но задумывались ли вы, какие из этих долек содержат больше кожуры: те, которые относятся к той части, что ближе к центру апельсина, или те, которые ближе к краю?

Оказывается, что если долька не является «шляпкой», то количество кожуры не зависит от того, к какой части апельсина она относится (конечно, мы считаем апельсин шаром).

На рисунке 2 срезаны две дольки апельсина одинаковой толщины. Как вы думаете, на какой из долек больше кожуры?

Рассмотрим разрез (сечение) апельсина плоскостью. Пусть радиус апельсина (с кожурой) равен  $R$ , а радиус внутренней части апельсина (апельсина без кожуры) равен  $r$  (рис. 3). Пусть  $d$  — расстояние от центра апельсина до плоскости разреза. Найдем пло-



Рис. 1

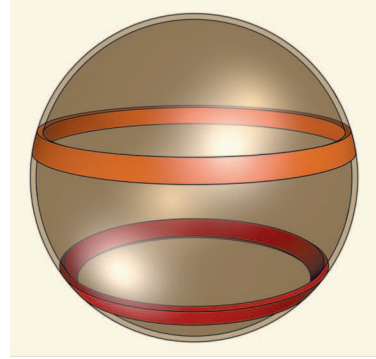


Рис. 2

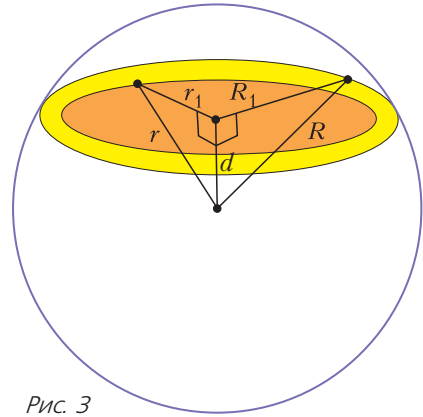


Рис. 3

щадь желтого кольца, т.е. той части разреза, которая принадлежит кожуре. Обозначим радиусы кругов в разрезе апельсина  $r_1$  и  $R_1$ .

Площадь  $S$  желтого кольца равняется разности площадей большого и маленького кругов, т.е.  $\pi R_1^2 - \pi r_1^2$ . С другой стороны, по теореме Пифагора  $R_1^2 = R^2 - d^2$ , а  $r_1^2 = r^2 - d^2$ . Подставив эти выражения в формулу для  $S$ , получим, что  $S = \pi(R^2 - r^2)$ , т.е. зависит только от радиусов апельсина с кожурой и без кожуры.

Из этого следует, что если  $h$  — толщина дольки апельсина, то объем кожуры в ней будет равен  $\pi h(R^2 - r^2)$ . Объяснить это можно, например, с помощью принципа Кавальери: объемы двух тел с равными по площади сечениями всех общих секущих их плоскостей, параллельных данной плоскости, равны (рис. 4). Действительно, по принципу Кавальери, объем кожуры в дольке толщины  $h$  будет равен объему параллелепипеда (или цилиндра) с площадью основания  $\pi(R^2 - r^2)$  и высотой  $h$ , т.е.  $\pi h(R^2 - r^2)$ .

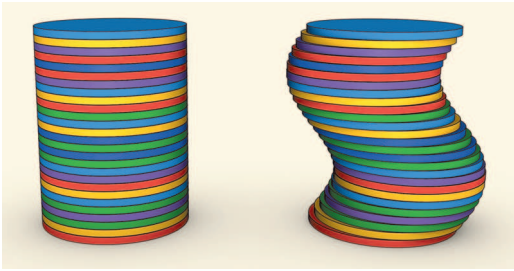


Рис. 4

Заметим, что если у апельсина кожура очень тонкая, то ее объем на дольке примерно равен площади поверхности кожуры на дольке, умноженной на толщину кожуры, равную  $R - r$ . Тогда площадь поверхности кожуры на апельсиновой дольке толщины  $h$

примерно равна  $\pi h \frac{(R^2 - r^2)}{(R - r)}$ . Устремив  $r$  к

$R$ , можно прийти к следующему удивительному заключению, называемому иногда **леммой Архимеда**:

*Площадь поверхности кожуры на апельсиновой дольке зависит только от толщины этой дольки  $h$  и от радиуса апельсина  $R$  и равна  $2\pi hR$ .*

Отметим, что эта величина равна площади боковой поверхности кругового цилиндра высоты  $h$  и радиуса  $R$ .

Теперь легко увидеть, что площадь поверхности всего апельсина радиуса  $R$  равна  $4\pi R^2$ .

Это наблюдение дает нам интересный способ построить карту Земли, а именно спроецировать точки на поверхность цилиндра, описанного около Земли, с соответствующими угловой и вертикальной координатами (рис.5), после чего изображение на цилиндре можно развернуть в плоскую карту. Такая проекция называется проекцией Ламберта и

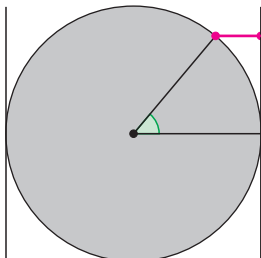
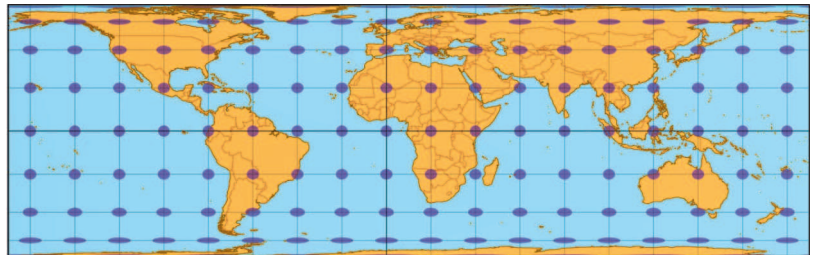


Рис. 5



как раз хороша тем, что изображенные на ней объекты имеют площадь, пропорциональную их настоящей площади.

На проекции Ламберта не создается такого визуального эффекта, как на привычных нам картах мира, на которых Гренландия по размеру кажется больше Африки, хотя на самом деле меньше Алжира. Дело в том, что обычно такие карты рисуют с помощью проекции Меркатора, основной плюс которой – точное сохранение углов между кривыми на поверхности Земли и на карте, это было очень важно для морской навигации.

Одно из самых красивых приложений леммы Архимеда придумал Генрик Моэзе в 1932 году. Его теорему можно переформулировать так:

*Если вы хотите покрыть канализационный люк дощечками так, чтобы не осталось дырок, то сумма ширин дощечек должна быть не меньше диаметра самого люка (рис.6).*

**Доказательство.** Обозначим дощечки, участвующие в нашем покрытии, через  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , а их ширины через  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Радиус канализационного люка обозначим через  $R$ .

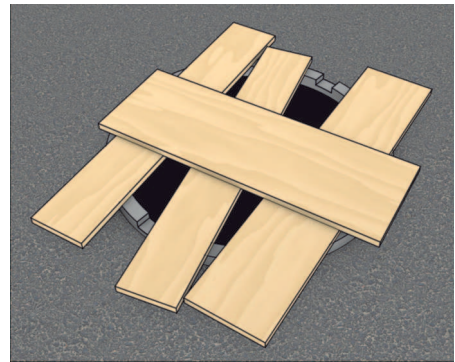


Рис. 6

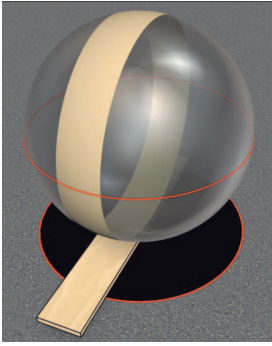


Рис. 7

Надстроим над люком сферу радиуса  $R$  и для каждой дощечки  $P_i$  рассмотрим кольцо  $C_i$  на сфере, вертикальной проекцией которого является дощечка (рис.7). Из леммы Архимеда следует, что площадь этого кольца равна  $2\pi h_i R$ . Поскольку дощечки покрывают канализационный люк, колечки должны покрывать сферу, а значит, их общая площадь должна быть не меньше площади сферы:

$$2\pi h_1 R + 2\pi h_2 R + \dots + 2\pi h_n R \geq 4\pi R^2.$$

После сокращения левой и правой частей на  $2\pi R$  получим требуемое неравенство для суммы ширины дощечек:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n \geq 2R.$$

Генрик Моэзе придумал эту теорему, решая следующую задачу, поставленную знаменитым польским математиком Альфредом Тарским: на какое минимальное число частей надо разрезать длинный и тоненький прямоугольник  $n \times 1/n$ , чтобы из них можно было сложить квадрат  $1 \times 1$ ?

Читатель сразу скажет: конечно, на  $n$  частей! Это правда, но доказать это не так просто. Именно для этого Моэзе и понадобилась его теорема. Он рассуждал так.

Пусть мы разрезали прямоугольник  $n \times 1/n$  на меньшее число частей, скажем на  $k$ , и сложили из них квадрат. Каждую из этих частей можно накрыть тоненькой дощечкой ширины  $1/n$ . Выходит, что в совокупности эти полоски накроют единичный квадрат, а значит, и круг диаметра 1, вписанный в него. Но по доказанной теореме о канализационном люке мы знаем, что это невозможно, поскольку суммарная ширина дощечек будет  $k/n < 1$ . Пришли к противоречию.

Теорема Моэзе о люке была позже обобщена Т.Бангом на случай любого выпуклого тела (см. статью А.Спивака и М.Смурова «Покрывание полосками» в «Кванте» №4, 5 за 1998 г.). Доказательство Банга основано на совершенно другой идее. Но это, конечно, не единственное применение леммы Архимеда в математике. Например, двадцать лет назад Карой Бездей и Боб Коннелли с помощью нее доказали следующую теорему:

*Пусть на плоскости нарисовано несколько кругов. Если их сдвинуть так, что расстояние между центрами каждой пары уменьшится, то площадь их объединения не может увеличиться, а площадь пересечения – уменьшится.*

Мы не будем здесь приводить доказательство, поскольку оно заняло бы несколько страниц и использует понятия, выходящие за пределы темы этой статьи. Скажем лишь, что в размерности три (и выше) аналогичное утверждение про шары остается недоказанным и называется гипотезами Кнезера–Полулсена (для объединения) и Кли–Вагона (для пересечения).

Удивительно, что сравнительно недавно, в 2006 году, известный математик Вин Де Силва нашел следующее обобщение леммы Архимеда:

*Пусть дана сфера  $\Omega$  и касательный к ней конус с вершиной в некоторой точке  $O$ . Тогда любые две сферы с центром в  $O$  (пересекающие сферу  $\Omega$ ) отрезают от конуса и от сферы колечки одинаковой площади (рис.8).*

Эта теорема превращается в лемму Архимеда, если точка  $O$  находится на бесконечно-

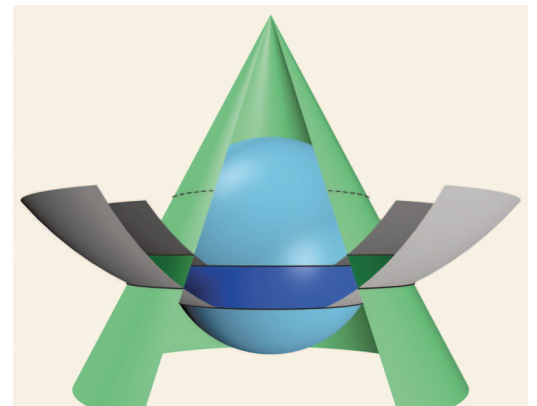


Рис. 8

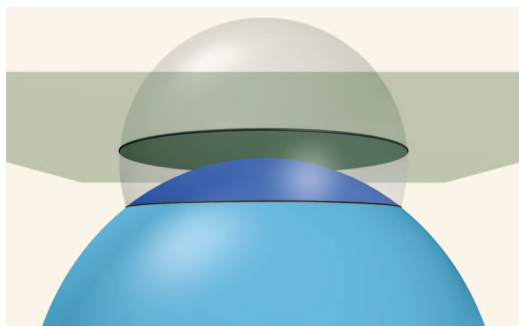


Рис. 9

сти, т.е. соответствующий конус является цилиндром, а секущие сферы – плоскостями, перпендикулярными его оси.

Другой интересный и давно известный случай получается, когда точка  $O$  лежит на сфере  $\Omega$  и касательный конус с вершиной в ней вырождается в плоскость (рис.9). Предположив, что радиус большей секущей сферы равен  $r$ , а меньшей  $\theta$ , получаем, что площадь высекаемой на  $\Omega$  шапочки равна площади высекаемого на плоскости круга, т.е.  $\pi r^2$ . Неожиданно замечательная формула, не правда ли?

## Загадка плоского стекла

**Л.АШКИНАЗИ**

*И он показал Харберту прибор, заменивший ему линзу. Это были два стекла, снятые с часов инженера и Спилета. Наполнив их водой и скрепив их края с помощью глины, Сайрес Смит сделал настоящее зажигательное стекло, которое сосредоточило лучи солнца на охапке сухого мха и воспламенило его.*

Жюль Верн. Таинственный остров

Мы видим мир через оконное стекло и на вопрос, искажает ли это стекло картинку, улыбнемся и ответим – конечно, нет. А теперь посмотрим на ситуацию более внимательно, начав со школьного учебника.

Все мы знаем, что такое линза. Объектив фотоаппарата и микроскопа – это линзы, лупа и очки – тоже линзы, и даже на передней панели радиостанции (рис.1 и 2) мы видим линзы. При этом одна относится к более редкой категории «асферической оптики», впрочем, такое бывает и в очках – видели на рецептах слово «цилиндр»? Увеличивать, уменьшать, отдалять, приближать, переворачивать – все, что ухитряется делать линза с изображениями, ей удастся потому, что луч света, проходящий через линзу, попадает на

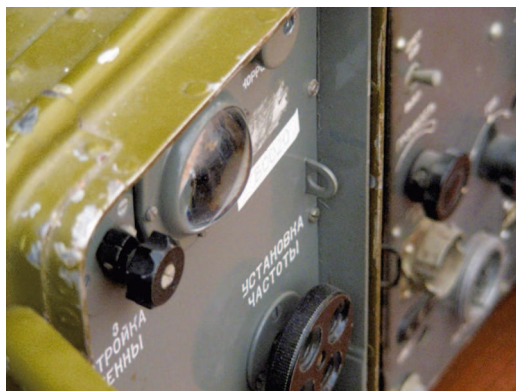


Рис. 1



Рис. 2

переднюю и заднюю ее поверхности, наклоненные к оси линзы, под разными углами – рисунок 3, ситуация 1, луч 1. Кроме, разумеется, случая, когда луч проходит через центр линзы и, в первом приближении, падает на обе поверхности под одинаковыми углами.

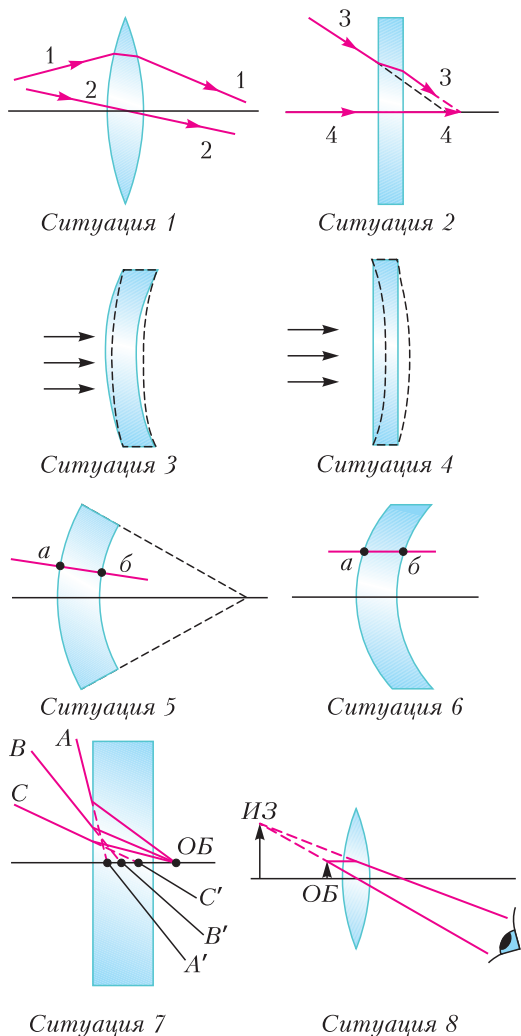


Рис. 3

Тогда он не поворачивается и, соответственно, не смещается – ситуация 1, луч 2.

Если же у нас не линза, а плоский лист стекла, то углы наклона поверхностей к оси одинаковы и поворот луча, который происходит при входе из воздуха в стекло, в точности компенсируется поворотом в противоположную сторону при выходе – ситуация 2, луч 3. В результате при прохождении луча через плоское стекло он просто смещается вбок и радостно летит себе дальше. Кроме, разумеется, ситуации, когда он падает на поверхность по нормали, т.е. перпендикулярно. Тогда он не поворачивается и, соответственно, не смещается – ситуация 2, луч 4. Поэтому иногда говорят и пишут, что плоский лист прозрачного материала не изменяет того, что

мы видим. Действительно, достаточно посмотреть в окно, чтобы в этом убедиться.

Однажды слушатели задали мне вопрос – а искажает ли изображение иллюминатор? Причем такой, в котором стекло не плоское, а выпуклое. Попутно заметим, что такое стекло выдерживает большее давление, нежели плоское, если это давление – с выпуклой стороны. Например, как в случае иллюминатора батискафа. Это ситуация 3, где штриховой линией показано, как стекло деформируется при давлении, и видно, что все слои «работают на сжатие». В отличие от ситуации 4, когда все слои «работают на растяжение». Стекла, как и многие другие материалы, выдерживают «на сжатие» большие нагрузки, нежели «на растяжение».

Заметим, прежде всего, что выпуклый иллюминатор может быть устроен по-разному. Если толщина «по радиусу» в пределах иллюминатора одинакова, то сами радиусы оказываются различными, их разность как раз равна толщине линзы. А центры, из которых, прочерчены радиусы, совпадают – ситуация 5. Другой вариант – радиусы одинаковы, но прочерчены из разных центров – ситуация 6. Точки «равного наклона»  $a$  и  $b$  в первом случае расположены на одном радиусе, а во втором – на одном и том же расстоянии от оси. Реальная геометрия иллюминатора зависит от технологии изготовления, а таких технологий несколько. В частности, если лист размягчается и изгибается на оправке, то это ситуация 5, а если иллюминатор штампуются, размещаясь между двумя формами – пуансоном и матрицей, то скорее всего это ситуация 6.

Однако ни в том, ни в другом случае луч, пришедший в точку  $a$ , совершенно не обязан попадать в точку  $b$ ! Так будет вести себя только тот луч, который показан на рисунке, а другие лучи, пришедшие в точку  $a$  с разных направлений, придут на вторую поверхность не в точку  $b$ , а в другие точки с другими наклонами. Иными словами, изогнутый лист оптически ведет себя не как плоский лист, т.е. заведомо искажает изображение. Но обычное плоское оконное стекло, с которого мы начали разговор, оно-то ведет себя хорошо?

Посмотрим на ситуацию повнимательнее. Пусть у нас есть плоский прозрачный лист, по одну сторону от него, причем вплотную или близко к нему, находится объект  $OB$ , а наблюдение ведется с противоположной сто-

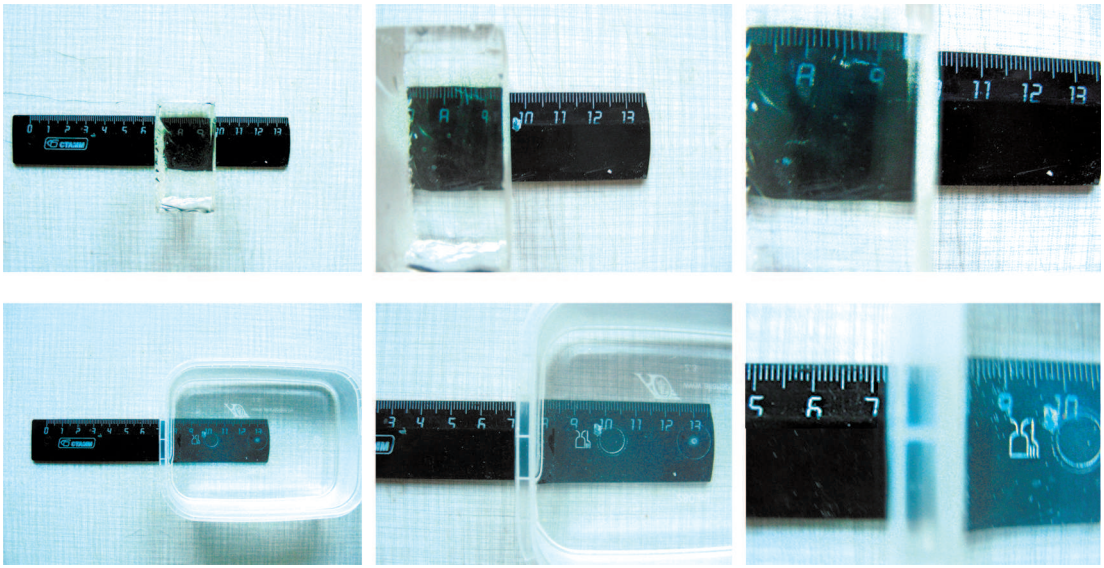


Рис. 4

роны – ситуация 7. Объект мы наблюдаем благодаря тому, что в наш прибор (глаз, фотоаппарат и др.) попадает либо собственное излучение объекта, либо рассеянное им излучение других источников. То, где мы видим объект, определяется именно этими лучами – мозг получает сигнал от глаз и восстанавливает ход лучей и говорит, что объект находится там, где пересекаются продолжения лучей, пришедших в глаз. Вот почему лупа и «увеличивает» – лучи, идущие от близко расположенного к ней объекта, расходятся веером, а их продолжения пересекаются на большем расстоянии от оси и объект *ОБ* кажется увеличенным. Но это, конечно, только изображение *ИЗ* (его еще называют «мнимым») – ситуация 8.

Из ситуации 7 на рисунке 3 ясно, что лучи света, исходящие от объекта более широким веером, после преломления в плоском стекле расходятся еще шире, а их продолжения пересекаются ближе к наблюдателю. Продолжения лучей группы *С* пересекаются в точке *С'*, продолжения лучей группы *В* – в точке *В'*, продолжения лучей группы *А* – в точке *А'*. Таким образом, чем более широкий веер лучей мы перехватываем, тем ближе нам будет казаться объект. Правда, эта «лупа» будет слабая, причем плохая – поскольку она будет собирать лучи всех групп, то изображение будет размытым. Чем ближе глаз или объектив фотоаппарата будет находиться к объекту, тем более широкий веер

лучей мы перехватим и тем ближе нам будет казаться объект. Эффект будет ослабевать при удалении объекта от стекла, поскольку при фиксированном размере зрачка изображение далекого объекта формируется более узким пучком лучей.

На рисунке 4 показан реальный эксперимент – черная линейка фотографировалась при приближении аппарата к объекту с расстояний от 25 см до 0,5 см через слой воды (коэффициент преломления 1,33, толщина 4 см) и через слой стекла (коэффициент преломления 1,5, толщина 4,5 см). Мы видим, что линейка, видимая через воздух, от кадра к кадру в обоих случаях кажется шире – потому, что она рассматривается фотоаппаратом с все меньшего расстояния. Линейка, видимая через воду или через стекло, естественно, тоже увеличивается, но она увеличивается сильнее. Причем для стекла (вверху) эффект больше, чем для воды (внизу). Другими словами, толстый плоский слой воды или стекла работает как лупа, но плохая – слабая и дающая размытое изображение.

Мораль этой истории такова. Некоторые физические задачи кажутся нам простыми потому, что мы решаем их для каких-то, принимаемых «по умолчанию», условий. Но для других условий ответ может оказаться совсем другим. Так, мир, рассматриваемый через толстое стекло, может быть совсем не похож на мир за окном.

# Избранные задачи XXVI Турнира имени А.П. Савина

**1** (6–8 классы). Суду предъявлено 100 одинаковых с виду монет, среди которых есть фальшивые. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Он отвечает на вопросы суда и доказывает свои ответы, проводя взвешивания на чашечных весах без гирь. Однако адвокат связан обязательством не разглашать ни про какую монету, фальшивая она или настоящая: он не имеет права делать взвешивания, из которых такую информацию можно логически вывести.

а) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 22, 66 или 88. Как адвокату доказать, что их 66, не нарушая обязательств?

б) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 20 или 80. Как адвокату доказать, что их 20, не нарушая обязательств?

*А. Шаповалов*

**2** (5–8 кл.). На каждой грани куба красными чернилами провели одну или обе диагонали. Оказалось, что при этом не образовалось ни одного треугольника с красными сторонами. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено?

*М. Евдокимов*

**3** (6–8 кл.).

а) В банке сидят 13 пауков. Известно, что в каждой их паре хотя бы один обидел другого и что каждый паук обидел всех обидчиков своих обидчиков. Докажите, что каждый обидел каждого.

б) В банке сидят несколько (более одного) пауков. Известно, что в каждой их паре хотя бы один обидел другого и что каждый паук обидел всех обидчиков своих обидчиков. При каком наименьшем количестве пауков можно утверждать, что каждый обидел каждого?

*С. Токарев*

**4** (5–8 кл.). Петя написал в строку 100 раз номер своей квартиры через пробел. Маша должна поставить между каждыми двумя числами знаки арифметических действий, а там, где захочет, – скобки. Она утверждает, еще не зная номера Петевой квартиры, что сможет получить в ответе любое натуральное число от 1 до 2021. Права ли она?

*Д. Шноль*

**5** (7–8 кл.). К кабинке канатной дороги, идущей на гору, подошли  $n + 2$  гнома массаами 1, 2, 1, 2, 3, 4, ...,  $n$  стоунов. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме как вверх, так и вниз кабинка ходит с двумя или с тремя пассажирами, при этом пассажиры сидят на двух скамьях так, чтобы массы на скамьях были одинаковыми. При каких  $n > 2$  они все смогут подняться на гору?

*А. Шаповалов*

**6** (8 кл.). На заборе написаны три различных целых числа. Известно, что:

- одно из чисел равно полусумме двух других;
- квадрат одного из чисел равен произведению двух других;
- одно из чисел равно 2021.

Найдите два других числа.

*Н. Наконечный, И. Раскина*

**7** (7–8 кл.). В прямоугольнике  $ABCD$ , отличном от квадрата, на биссектрису угла  $A$  опущен перпендикуляр  $CH$ . Докажите, что  $BH$  больше четверти периметра прямоугольника.

*А. Пешнин*

**8** (8 кл.). Решите в натуральных числах уравнение  $m! + n! = m^n$ .

*А. Грибалко*

**9** (8 кл.). Лист формата А4 перегнули сначала по линии  $BE$  так, что точка  $C$  совпала с точкой  $F$  на стороне  $AB$ , а затем по линии  $GH$  так, что точка  $D$  совпала с  $F$  (см.

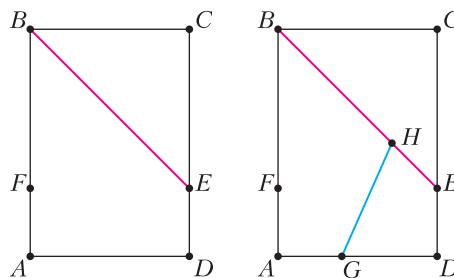




рисунок). Найдите угол  $BHG$ . ( $U$  листа формата А4 отношение сторон равно  $1:\sqrt{2}$ .)

*М. Волчкевич*

**10** (6–8 кл.). В наборе десять гирь, каждая из которых весит целое число граммов, не превосходящее 130. Докажите, что из набора можно взять несколько гирь и разложить их на чаши весов так, что весы окажутся в равновесии.

*А. Грибалко*

**11** (7–8 кл.). Точки  $P$  и  $Q$  лежат на диагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$ . Точки  $X$  и  $Y$  на сторонах  $CD$  и  $AD$  соответственно так, что  $\angle BPX = \angle BQY = 90^\circ$ . Точка  $Z$  – середина отрезка  $XY$ . Найдите угол  $PZQ$ .

*А. Доледенюк*

**12** (7–8 кл.). Найдите все положительные числа, которые при зачеркивании одной из цифр их десятичной записи увеличиваются в 4 раза.

*С. Токарев*

**13** (7–8 кл.). У Знайки есть бумажный равносторонний треугольник, а у Незнайки – квадрат, причем длины сторон их фигур равны. Знайка вырезает из своей фигуры одинаковые равносторонние треугольники, а Незнайка из своей – квадраты с такой же стороной (оба делают разрезы параллельно сторонам своей фигуры). Незнайка утверждает, что всегда сможет вырезать столько же квадратов, сколько Знайка вырежет треугольников. Прав ли он?

*А. Грибалко*

**14** (6–8 кл.). У Коли есть десять карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Он разложил их на столе в ряд числами вниз. Саша может указать любые два набора карточек и спросить у Коли, равны ли произведения чисел на карточках в этих наборах. Как Саше за три вопроса

узнать, лежат ли карточки в порядке возрастания написанных на них чисел?

*А. Грибалко*

**15** (8 кл.). На столе лежит 300 монет трех разных масс, по 100 штук каждой массы. Ревизор делает две серии проверок. В каждой серии он разбивает на пары все монеты на столе, сравнивает на чашечных весах без гирь массы монет каждой пары и кладет себе в карман все монеты пар разной массы. Какое наибольшее число монет ревизор может гарантированно положить себе в карман?

*А. Шаповалов*

**16** (8 кл.). В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ , биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $I$ . Точки  $A_0$  и  $C_0$  симметричны точке  $I$  относительно прямых  $AB$  и  $CB$  соответственно. Докажите, что если  $P$  – точка пересечения прямых  $A_1C_1$  и  $A_0C_0$ , то прямые  $PI$  и  $AC$  параллельны.

*Д. Швецов*

**17** (7–8 кл.). В ряд выставили несколько гирек. Вторая тяжелее первой, а каждая гирька, начиная с третьей, весит столько же, сколько две предыдущие вместе. Обозначим через  $K(n)$  количество способов выбрать из первых  $n$  гирек несколько штук и разложить их на две чаши весов так, чтобы они были в равновесии (способы, различающиеся только порядком чаш, считаются одинаковыми). Докажите, что  $K(n) = 2K(n-1) - K(n-4)$  при  $n > 4$ .

*А. Грибалко*

Подробную информацию о турнире можно найти на сайте [tursavin.ru](http://tursavin.ru)

*Публикацию подготовили А.Блинков, А.Грибалко, А.Заславский, И.Раскина, С.Токарев, А.Хачатурян, И.Эльман*

# ЕГЭ по физике

В 2021 году ЕГЭ по физике по структуре вариантов ничем не отличался от предыдущего года. Варианты же 2022 года будут существенно отличаться от вариантов последних двух лет. Перечислим некоторые отличия.

1) Варианты не содержат задания по астрономии.

2) В каждом варианте 30 заданий – 23 в первой части (только ответ) и 7 во второй (развернутое решение). Максимальная сумма баллов – 54.

3) Первая часть содержит 11 заданий с ответом в виде числа, 4 задания с множественным выбором, 8 заданий на установление соответствия.

4) В заданиях с множественным выбором надо выбрать не два, а ВСЕ правильные утверждения из пяти и указать их номера. Таких заданий 4, они оцениваются максимум в 2 балла каждое.

5) Структура второй части: задача 24 – качественная (3 балла), задачи 25, 26 – расчетные с развернутым ответом (2 балла), задачи 27, 28, 29 оцениваются в 3 балла, задача 30 оценивается максимум в 4 балла – 3 балла за решение плюс 1 балл за обоснование применимости физических законов и корректности написания формул.

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2022 года можно найти на сайте ФИПИ.

Ниже приводится один из открытых вариантов ЕГЭ 2021 года с ответами ко всем заданиям, требующим краткого ответа, и решениями всех задач, требующих развернутого ответа. Решения даются в редакции, предложенной предметной комиссией.

Инструкцию по выполнению работы и необходимые справочные данные можно найти, например, в «Кванте» №9 за 2021 год или на сайте ФИПИ.

## Часть 1

**Ответами к заданиям 1–24 являются слово (слова), число или последовательность цифр или чисел.**

**Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера со-**

**ответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.**

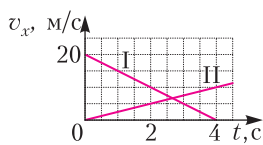


Рис. 1

1. На рисунке 1 приведены графики зависимости проекции скорости от времени для легкового автомобиля (I) и микроравтобуса (II), движущихся по прямой дороге, вдоль которой и направлена ось  $x$ . Определите отношение модулей ускорений  $a_I/a_{II}$ .

2. Две планеты с одинаковыми массами обращаются по круговым орбитам вокруг звезды. Для первой из них сила притяжения к звезде в 36 раз меньше, чем для второй. Каково отношение  $R_1/R_2$  радиусов орбит первой и второй планет?

3. Шарик массой 0,2 кг падает с некоторой высоты с начальной скоростью, равной нулю. Его кинетическая энергия при падении на землю равна 24 Дж. С какой высоты упал шарик? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Невесомый рычаг находится в равновесии (рис.2). Сила  $F_1 = 8$  Н, ее плечо равно 20 см. Каков модуль силы  $\overline{F_2}$ , если ее плечо равно 16 см?

5. На наклонной плоскости находится брусок массой 2 кг, для которого составлена таблица зависимости модуля силы трения  $F_{тр}$  от угла наклона плоскости к горизонту  $\alpha$  с погрешностью, не превышающей 0,01 Н. На основании данных, приведенных в таблице, и используя закон сухого трения, выберите **два** верных утверждения.

1) Модуль силы трения скольжения уменьшается при увеличении угла наклона плоскости к горизонту.

2) Модуль силы трения скольжения увеличивается при увеличении угла наклона плоскости к горизонту.

$\alpha$ , рад	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$F_{тр}$ , Н	0	1,0	2,0	3,86	3,76	3,63	3,46	3,25	3,01	2,75	2,45	2,13

- 2) Сила трения покоя не зависит от угла  $\alpha$ .
- 3) С ростом угла наклона модуль силы трения покоя уменьшается.
- 4) Коэффициент трения скольжения меньше 0,4.
- 5) Когда угол наклона меньше 0,1 рад, брусок скользит по наклонной плоскости.

**6.** Деревянный шарик плавает в керосине. Как изменится масса вытесненной жидкости и глубина погружения шарика в жидкость, если он будет плавать в воде?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

**7.** На рисунке 3 показан график зависимости координаты  $x$  тела, движущегося вдоль оси  $x$ , от времени  $t$  (парабола). Графики А) и Б) на рисунке 4 представляют собой зависимости физических величин, характеризующих движение этого тела, от времени  $t$ . Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять.

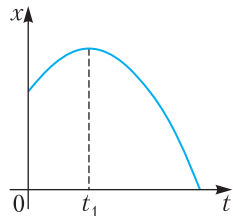


Рис. 3

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

**ГРАФИКИ**

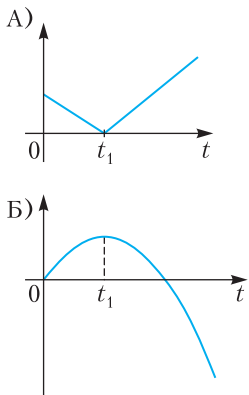


Рис. 4

**ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ**

- 1) проекция перемещения тела на ось  $x$
- 2) проекция ускорения тела на ось  $x$
- 3) кинетическая энергия тела
- 4) модуль скорости тела

**8.** На рисунке 5 показано изменение состояния идеального газа в количестве 4 моль. Какая температура соответствует состоянию 2?

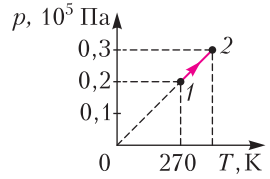


Рис. 5

**9.** Рабочее тело тепловой машины за цикл получает от нагревателя количество теплоты, равное 100 Дж, и совершает работу 40 Дж. Каков КПД тепловой машины?

**10.** В закрытом сосуде под поршнем находится влажный воздух при температуре 100 °С. Парциальное давление водяного пара в сосуде равно 60 кПа. Какова (в процентах) относительная влажность воздуха в сосуде?

**11.** Идеальный газ переводят из состояния 1 в состояние 3 так, как показано на графике зависимости давления газа  $p$  от объема  $V$  (рис.6). Масса газа в процессе не изменяется. Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения, характеризующих отраженные на графике процессы.

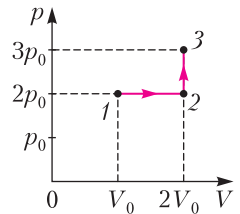


Рис. 6

- 1) Плотность газа минимальна в состоянии 1.
- 2) В ходе процесса 1–2–3 среднеквадратичная скорость теплового движения молекул газа увеличивается в 3 раза.
- 3) В процессе 2–3 абсолютная температура газа изохорно уменьшилась в 1,5 раза.
- 4) В процессе 1–2 абсолютная температура газа изобарно увеличилась в 2 раза.
- 5) Абсолютная температура газа максимальна в состоянии 3.

**12.** В цилиндре под поршнем находится твердое вещество массой  $m$ . Цилиндр поместили в печь. На рисунке 7 схематично

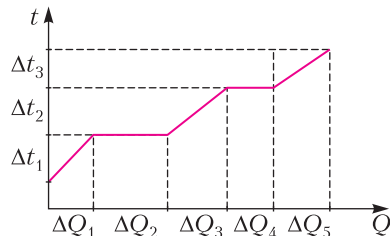


Рис. 7

показан график изменения температуры  $t$  вещества по мере поглощения им количества теплоты  $Q$ . Формулы А) и Б) позволяют рассчитать значения физических величин, характеризующих происходящие с веществом тепловые процессы.

Установите соответствие между формулами и физическими величинами, значение которых можно рассчитать по этим формулам. К каждой позиции из первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФОРМУЛЫ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А) $\frac{\Delta Q_2}{m}$	1) удельная теплоемкость жидкости
Б) $\frac{\Delta Q_3}{m\Delta t_2}$	2) удельная теплота плавления
	3) удельная теплоемкость твердого вещества
	4) удельная теплота парообразования

13. Протон  $p$  влетел в зазор между полюсами электромагнита со скоростью  $\vec{v}$  направленной влево (рис.8). Вектор индукции  $\vec{B}$  магнитного поля направлен вертикально вниз. Куда направлена относительно рисунка (вправо, влево, вверх, вниз, к наблюдателю, от наблюдателя) действующая на протон сила Лоренца  $\vec{F}$ ? Ответ запишите словом (словами).

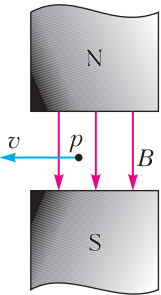


Рис. 8

14. Во сколько раз уменьшится модуль сил взаимодействия двух небольших металлических шариков одинакового диаметра, имеющих заряды  $q_1 = +4$  нКл и  $q_2 = -8$  нКл, если шарики привести в соприкосновение и раздвинуть на прежнее расстояние?

15. Какая из точек (1, 2, 3 или 4) является изображением точки  $S$ , создаваемым тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием  $F$  (рис. 9)?

16. Проволочная рамка площадью  $60 \text{ см}^2$  помещена в однородное магнитное поле так, что плоскость рамки перпендикулярна век-

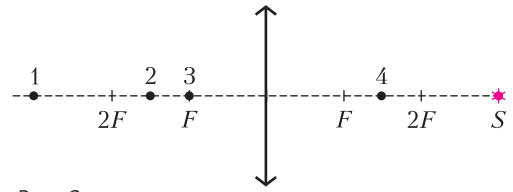


Рис. 9

тору индукции  $\vec{B}$ . Проекция  $B_n$  индукции магнитного поля на нормаль к плоскости рамки изменяется во времени  $t$  согласно графику на рисунке 10.

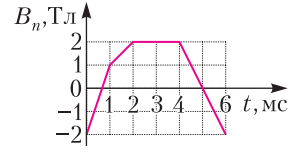


Рис. 10

Из приведенного ниже списка выберите два правильных утверждения о процессах, происходящих в рамке.

- 1) Модуль ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в рамке, минимален в интервале времени от 0 до 1 мс.
- 2) Магнитный поток через рамку в интервале времени от 2 до 4 мс равен 6 мВб.
- 3) Модуль ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в рамке, в интервале времени от 4 до 6 мс равен 12 В.
- 4) Модуль скорости изменения магнитного потока через рамку максимален в интервале времени от 0 до 1 мс.
- 5) Модуль ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в рамке, максимален в интервале времени от 1 до 2 мс.

17. В первом опыте частица массой  $m$ , несущая заряд  $q$ , движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v$ . Во втором опыте та же частица движется в том же магнитном поле по окружности большего радиуса. Как при переходе от первого опыта ко второму изменились кинетическая энергия частицы и период ее обращения?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

18. Электрическая цепь на рисунке 11 состоит из источника постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  и внешней цепи из двух одинаковых резисторов сопротивлением  $R$ , включенных параллельно.

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

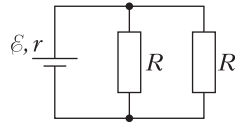


Рис. 11

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

**ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ**

**ФОРМУЛЫ**

- А) мощность тока, выделяющаяся на одном из резисторов
- Б) мощность сторонних сил в источнике тока

- 1)  $\frac{\epsilon^2 R}{2\left(r + \frac{R}{2}\right)^2}$
- 2)  $\frac{\epsilon^2}{r + \frac{R}{2}}$
- 3)  $\frac{\epsilon^2 R}{4\left(r + \frac{R}{2}\right)^2}$
- 4)  $\frac{\epsilon^2 r}{\left(r + \frac{R}{2}\right)^2}$

19. В результате реакции ядра бора  $^{11}_5\text{B}$  и  $\alpha$ -частицы  $^4_2\text{He}$  образуются нейтрон и ядро  $^A_Z\text{X}$ . Определите массовое число и зарядовое число ядра  $^A_Z\text{X}$ .

**В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.**

20. Два источника излучают свет частотой  $\nu_1 = 5 \cdot 10^{14}$  Гц и  $\nu_2 = 7,5 \cdot 10^{14}$  Гц. Каково отношение модулей импульсов фотонов  $p_2/p_1$ , излучаемых этими источниками?

21. На установке, представленной на фотографии (рисунок 12,а – общий вид, рисунок 12,б – фотоэлемент), исследовали зависимость кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света. Для этого в прорезь осветителя помещали различные светофильтры. В первой серии опытов использовался светофильтр, пропускающий только красный свет, а во второй – пропускающий только желтый.

Как изменялись при переходе от первой серии опытов ко второй длина волны падающего света и максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов? Для каждой ве-

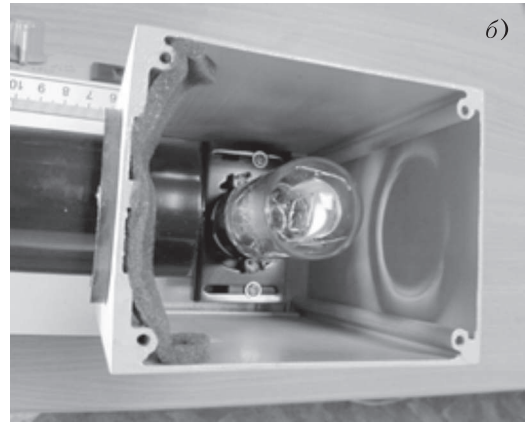
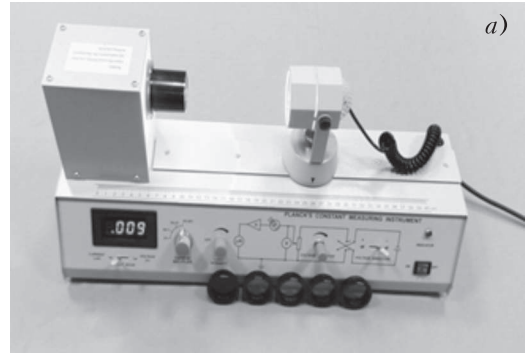


Рис. 12

личины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличивалась; 2) уменьшалась; 3) не изменялась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждого ответа. Цифры в ответе могут повторяться.

22. На рисунке 13 приведена фотография электрической цепи по измерению сопротив-

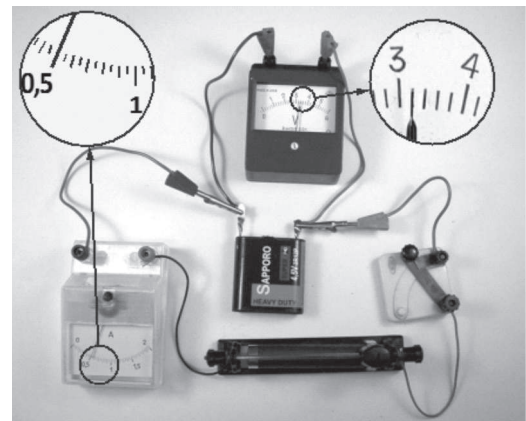


Рис. 13

ления реостата. Погрешности измерения силы тока в цепи и напряжения на источнике равны половине цены деления амперметра и вольтметра. Каково по результатам этих измерений напряжение на источнике?

Ответ запишите в виде ( \_\_\_\_\_ ± \_\_\_\_\_ ) В.

**В бланк ответов № 1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.**

**23.** Ученик изучает свободные электромагнитные колебания. В его распоряжении имеются пять аналогичных колебательных контуров с различными катушками индуктивности и конденсаторами, характеристики которых указаны в таблице. Какие **два** колеба-

№ контура	Максимальное напряжение на конденсаторе, В	Емкость конденсатора С, мкФ	Индуктивность катушки L, мГн
1	14	6	4
2	8	5	6
3	14	6	12
4	10	10	4
5	8	12	6

тельных контура (запишите в ответ их номера) необходимо взять ученику для того, чтобы на опыте исследовать зависимость периода свободных колебаний силы тока, протекающего в катушке, от электроемкости конденсатора?

**24.** На рисунке 14 представлена диаграмма Герцшпрунга–Рессела. Выберите **все** верные утверждения о звездах.

1) «Жизненный цикл» звезды спектрального класса G главной последовательности более длительный, чем звезды спектрального класса B главной последовательности.

2) Средняя плотность сверхгигантов существенно больше средней плотности белых карликов.

3) Для главной последовательности светимость звезд спектрального класса G ниже светимости звезд спектрального класса B.

4) Средняя плотность гигантов существенно меньше средней плотности белых карликов.

5) Чем ниже температура поверхности звезды, тем меньше ее абсолютная звездная величина.

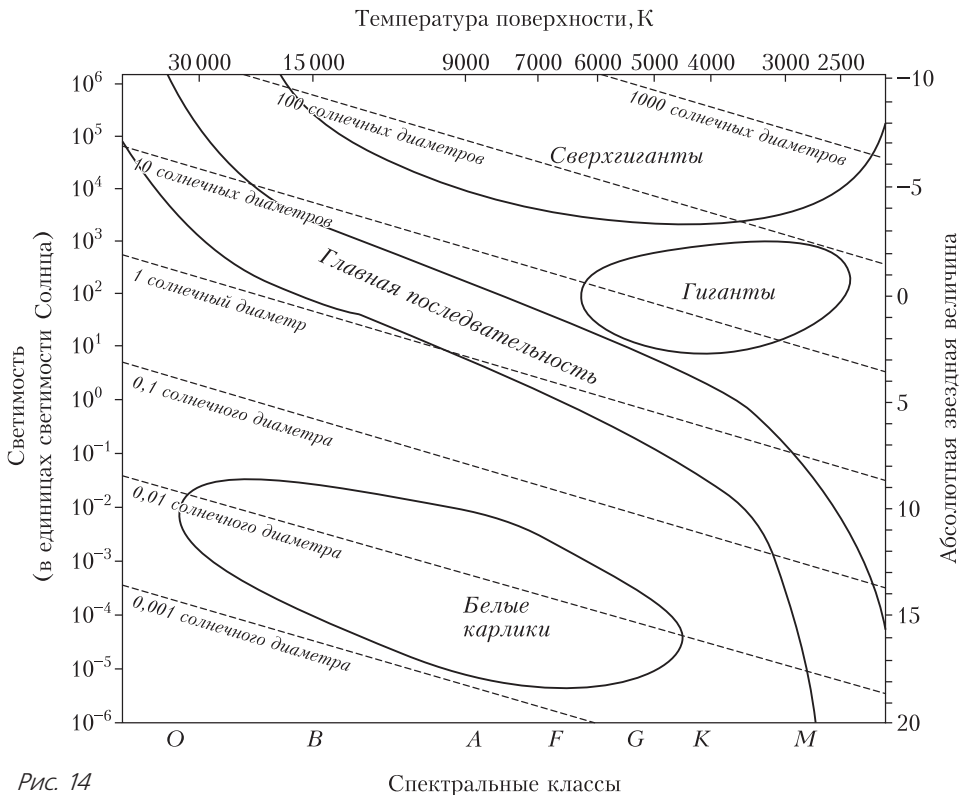


Рис. 14

Спектральные классы

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

**Часть 2**

**Ответом к заданиям 25 и 26 является число. Это число запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.**

**25.** В термос с водой массой 500 г при температуре 41 °С опускают бутылочку с детским питанием, в результате чего она нагревается до температуры 36 °С. Теплоемкость бутылочки с питанием равна 525 Дж/К. Какова была ее начальная температура? Теплоемкостью термоса пренебречь.

**26.** На дифракционную решетку с периодом 0,004 мм падает по нормали плоская монохроматическая волна длиной 420 нм. Какое количество дифракционных максимумов можно наблюдать с помощью этой решетки?

**Для записи ответов на задания 27–32 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер задания (27, 28 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.**

**27.** В камере, из которой откачан воздух, создали электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  и магнитное поле индукцией  $\vec{B}$ . Поля однородные,  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . В камеру влетает протон  $p$ , вектор скорости которого перпендикулярен  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , как показано на рисунке 15. Модули напряженности электрического поля и индукции магнитного поля таковы, что протон движется прямолинейно. Куда отклонится протон на начальном участке траектории, если его скорость уменьшить? Ответ поясните, указав, какие явления и зако-

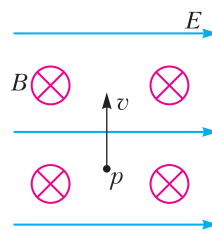


Рис. 15

номерности Вы использовали для объяснения. Влиянием силы тяжести пренебречь.

**Полное правильное решение каждой из задач 28–32 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.**

**28.** В процессе прямолинейного равноускоренного движения тело за 2 с прошло 20 м, увеличив свою скорость в 3 раза. Чему была равна начальная скорость тела?

**29.** К двум вертикально расположенным пружинам одинаковой длины подвесили однородный стержень массой  $M = 2$  кг и длиной  $L = 40$  см. Если к этому стержню подвесить груз на расстоянии  $d = 5$  см от правой пружины, то стержень будет расположен горизонтально, а растяжения обеих пружин будут одинаковы (рис.16). Жесткость левой пружины в 3 раза меньше, чем у правой. Чему равна масса  $m$  подвешенного груза? Сделайте рисунок с указанием сил, использованных в решении задачи.

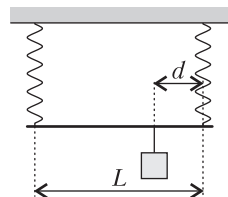


Рис. 16

**30.** В закрытом сосуде при температуре 100 °С находится влажный воздух с относительной влажностью 60% под давлением 100 кПа. Объем сосуда изотермически уменьшили в 2,5 раза. Во сколько раз надо вместо этого увеличить абсолютную температуру без изменения объема сосуда, чтобы получить такое же конечное давление? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

**31.** На рисунке 17 изображена зависимость силы тока в лампе накаливания от

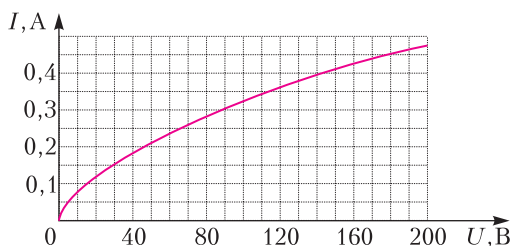


Рис. 17

приложенного к ней напряжения. Найдите мощность, выделяющуюся на резисторе, включенном последовательно с лампой в сеть с напряжением 220 В, если сила тока в цепи равна 0,4 А.

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

### Профильный экзамен по физике

В 2021 году в связи с продолжающимся распространением коронавирусной инфекции профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводился в дистанционном формате на портале <https://exam.distant.msu.ru/>

Для участия в экзамене предъявлялись следующие технические требования к рабочему месту испытуемого. 1) Наличие ноутбука (желательно), персонального компьютера, смартфона или планшета со стабильным интернет-соединением (без прерываний на протяжении испытания и минимальной скоростью от 5 Мбит/с). 2) При подключении к видеоконференции с помощью смартфона или планшета любого типа, для получения задания обязательно использование второго устройства, например компьютера, иного смартфона/планшета. 3) Необходимо также наличие браузера Google Chrome или Mozilla Firefox последних версий и сканирующего

**32.** Монохроматическое рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-10}$  м падает по нормали на пластинку и создает давление  $P = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Па. При этом 70% фотонов отражается, а остальные проходят сквозь пластинку. Определите концентрацию фотонов в пучке падающего излучения. Рассеянием и поглощением излучения пренебречь. Считать, что фотоны в пучке распределены равномерно.

*Публикацию подготовили  
М.Демидова, А.Черноуцан*

или фотографирующего устройства для сканирования или фотографирования экзаменационной работы с последующей загрузкой на портал экзамена.

Руководство МГУ приняло решение сократить как объем заданий для профильного экзамена (ДВИ), так и время их выполнения. В итоге типовое задание по физике в этом году охватывало три основных раздела программы для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось три астрономических часа.

Ниже приводятся задания профильного экзамена 2021 года.

### Механика

**1.** Запишите связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Сформулируйте закон сохранения импульса.

**Задача.** На гладкой горизонтальной поверхности лежат две одинаковые шайбы, связанные легкой нерастяжимой слегка натянутой нитью. Тонкий брусок, масса которого в  $k = 2$  раза превышает массу каждой из шайб, движется поступательно со скоростью  $v_0 = 2$  м/с перпендикулярно нити и ударяет точно в ее середину (рис. 1). Считая размер шайб пренебрежимо малым по

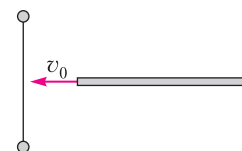


Рис. 1



сравнению с длиной нити, определите модуль  $u$  скорости каждой шайбы относительно бруска в момент удара шайб о брусок.

**2.** Сформулируйте закон сохранения механической энергии для системы материальных точек. Поясните смысл входящих в этот закон величин.

**Задача.** По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью  $v = 1$  м/с скользит доска массой  $M = 20$  кг, на которой лежит брусок. Доска вступает в соприкосновение с горизонтально расположенной легкой пружиной жесткостью  $k = 100$  Н/м, один конец которой прикреплен к стене (рис.2). Коэффициент трения между бруском и доской  $\mu = 0,2$ . Центры масс бруска и доски лежат в одной вертикальной плоскости с осью пружины. Скорость доски параллельна оси пружины. При какой массе бруска  $m$  он не сдвинется с доски в дальнейшем? Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Считайте, что пружина при взаимодействии с доской сжимается не полностью.

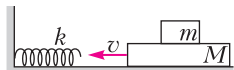


Рис. 2

### Молекулярная физика и термодинамика

**1.** Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размеры молекул?

**Задача.** В сосуде объемом  $V = 3$  л находится насыщенный водяной пар при температуре  $t = 100$  °С. До какого объема  $V_1$  нужно сжать пар при постоянной температуре, чтобы в сосуде образовалась вода массой  $m = 1$  г? Нормальное атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль. Ответ приведите в литрах.

**2.** Какие виды парообразования вы знаете? Что такое удельная теплота парообразования?

**Задача.** В закрытом с обоих концов и откачанном цилиндрическом сосуде объемом  $V = 2$  л может свободно перемещаться невесомый тонкий поршень. В сосуд с одной стороны от поршня ввели  $m_1 = 2$  г воды, а с другой стороны  $m_2 = 1$  г азота. Какую часть  $x$  объема цилиндра будет занимать азот при температуре  $t = 100$  °С в обеих частях цилиндра? Молярные массы воды и азота равны

$M_1 = 18$  г/моль и  $M_2 = 28$  г/моль соответственно. Нормальное атмосферное давление примите равным  $p_0 = 10^5$  Па. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Ответ приведите в процентах.

### Электродинамика

**1.** Дайте определение емкости. Запишите формулу для емкости плоского конденсатора.

**Задача.** Между пластинами плоского конденсатора, помещенного в вакуум, создано однородное электрическое поле (рис.3). Из некоторой точки с поверхности отрицательно заряженной пластины с одной и той же

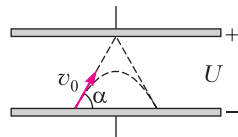


Рис. 3

скоростью  $v_0 = 10$  м/с и под одним и тем же углом  $\alpha = 60^\circ$  к пластине вылетают два маленьких шарика, один из которых не заряжен, а второй несет положительный заряд  $q = 10^{-7}$  Кл. Незаряженный шарик возвращается к первой пластине после упругого удара о противоположную пластину. Заряженный шарик возвращается к первой пластине, не достигнув противоположной пластины. Какова масса  $m$  заряженного шарика, если известно, что оба шарика вернулись на первую пластину в одной и той же точке? Разность потенциалов между пластинами конденсатора  $U = 750$  В. Действием силы тяжести можно пренебречь. Считайте, что при ударе о пластину конденсатора незаряженный шарик заряда не приобретает.

**2.** Сформулируйте закон электромагнитной индукции и правило Ленца.

**Задача.** Плоский контур с источником постоянного тока находится во внешнем однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которого  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости контура (рис.4). На сколько процентов  $n$  по отношению к первоначальному значению изменится выделяющаяся в контуре мощность после того, как магнитная индукция начнет уменьшаться со скоростью  $\dot{k} = 0,01$  Тл/с? Площадь контура  $S = 0,1$  м<sup>2</sup>, ЭДС источника  $\mathcal{E} = 10$  мВ. Ответ округлите до целых.

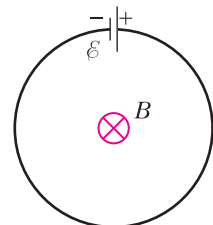


Рис. 4

Публикацию подготовил С.Чесноков

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №8)

1. В каждой выделенной тройке (рис.1) лампочек должны гореть хотя бы две. Значит, надо заменить еще хотя бы  $2 + 1 + 1 + 1 = 5$  лампочек.

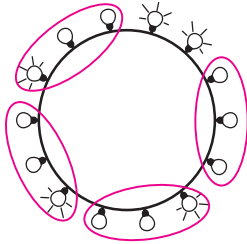


Рис. 1

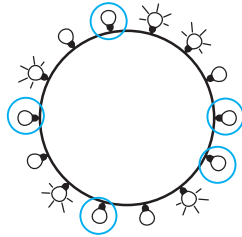


Рис. 2

Это сделать действительно можно: пример приведен на рисунке 2.

2. Когда Лука оказался около информационного щита, у него было  $14 - 5,5 = 8,5$  литров бензина, так как, проехав 55 км, он потратил 5,5 литров бензина. Значит, больше 85 км, не заправляясь, он проехать не сможет.

С другой стороны, заправиться ему нужно не дальше чем за 400 км до конечного пункта, потому что иначе даже полного 40-литрового бензобака не хватит для того, чтобы доехать до конца. Значит, заправка должна находиться на расстоянии хотя бы  $520 - 400 = 120$  км от начального пункта. Лука уже проехал 55 км, поэтому искомая заправка должна быть от него на расстоянии хотя бы  $120 - 55 = 65$  км.

Обоим этим требованиям удовлетворяет только заправка на расстоянии 55 км от Луки, так что ему следует заправиться на ней.

3. Нельзя.

Рассмотрим грань 1 и среди соседних с ней выберем ту, на которой написано наименьшее число, т.е.  $a$  (это 2 или 3). Пусть общие соседи граней 1 и  $a$  — это грани  $b$  и  $c$ . Тогда  $1 < a < b$  и  $1 < a < c$ , при этом тройки граней 1,  $a$ ,  $b$  и 1,  $a$ ,  $c$  идут в разных направлениях — одна по часовой стрелке, а другая против часовой. Поэтому так расставить числа невозможно.

4. 10!

### В поисках оптимальных построений

11. *Указание.* Постройте две пересекающиеся окружности с центрами на прямой  $l$  — так, чтобы точка  $N$  была одной из точек их пересечения.

12. *Указание.* Через  $B$  проведите произвольную секущую  $FN$  ( $F$  лежит на окружности  $s$ ,  $N$  — на  $\omega$ ). Вторая и третья линии — отрезки  $TF$  и  $QN$ . Докажите, что  $TF \parallel QN$ .

13. *Указание.* Первая линия: окружность с центром  $O$ , описанная около треугольника  $ABC$ .

Вторая линия: луч  $AI$  пересекает эту окружность в точке  $W$ . Третья линия: окружность с центром в точке  $W$  радиуса  $WB$  будет искомой. Покажите, что  $WB = WC = WI$  — так называемая «лемма о трезубце».

### Фазовые диаграммы колебательных систем

1. Отличие шнура от пружины заключается в том, что он не способен к деформации сжатия. Следовательно, диаграмма на той части, где происходит подъем груза до состояния нерастянутого шнура, будет соответствовать части параболы, ориентированной ветвями по оси координаты.

2. В момент касания нижней пружиной пола возникнет вторая сила упругости. Такое состояние будет эквивалентно колебаниям на двух параллельно соединенных пружинах. Вид диаграммы будет аналогичен рисунку 9 в статье.

3.  $t = 5,96$  с;  $x = 1,5$  см.

$$4. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}$$

$$5. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{(v_0^2 - 2gh)k}{(m + M)g^2}}$$

6.  $T = 0,6\pi$  с  $\approx 1,9$  с.

7. Проведите рассуждения задачи 2 из статьи в общем виде.

8. 1)  $x_1 = 29$  см,  $x_2 = -5$  см.

### Избранные задачи XXVI Турнира имени А.П.Савина

1. а) Адвокат может разбить монеты на 25 четверок, в 20 из них поместить по три фальшивые монеты, в одну — две фальшивые, а в оставшиеся четыре — по одной. Для каждой четверки он сравнивает две пары монет так, чтобы они оказались неравными. Неравновесие показывает, что в каждой четверке есть хотя бы одна настоящая монета и хотя бы одна фальшивая. Так как фальшивых монет не менее 25, то вариант «22 фальшивых» не подходит. Так как настоящих монет не менее 25, то вариант «88 фальшивых» тоже не подходит.

Докажем, что условие неразглашения выполнено. В легкой паре любая из монет может быть настоящей или фальшивой в случае, когда в четверке ровно одна фальшивая монета. В тяжелой паре любая из монет может быть настоящей или фальшивой в случае, когда в четверке ровно одна настоящая монета.

б) Адвокат может выделить 22 группы по четыре монеты и сравнить одну из них со всеми осталь-

ными. Если эта группа окажется легче остальных, то суд будет знать, что в каждой более тяжелой группе есть хотя бы одна настоящая монета. Следовательно, настоящих монет не менее 21, поэтому вариант «80 фальшивых» не подходит. При этом в более легкой группе может быть три фальшивые монеты, а в остальных – по одной или ни одной, но суд не будет знать, в каких именно группах фальшивых монет нет, а значит, не получит запрещенной информации.

## 2. 8 диагоналей.

*Оценка.* Грани куба имеют 12 диагоналей. Если раскрасить вершины куба в шахматном порядке, то шесть диагоналей будут соединять белые вершины и шесть – черные. «Белые» диагонали образуют четыре треугольника, и чтобы их разрушить, нужно оставить не более четырех таких диагоналей. То же верно и для «черных» диагоналей. Таким образом, всего может быть проведено не более восьми диагоналей.

*Пример.* На нижней и верхней гранях проведем обе диагонали, а на боковых – по одной так, чтобы у них не было общих точек.

3. а) См. оценку в п. б).

б) При 5 пауках.

*Оценка.* Обозначим количество пауков в банке через  $n$ . Докажем, что при  $n \geq 5$  можно утверждать, что каждый паук обидел каждого. Для начала установим, что произвольный паук  $P$  обидел не менее  $n - 2$  пауков. Действительно, если бы он обидел не более  $n - 3$  пауков, то имелись бы пауки  $Q$  и  $R$ , которых  $P$  не обидел. Считая для определенности, что  $Q$  обидел  $R$ , приходим к противоречию, поскольку  $P$ , обиженный  $R$ , обязан был бы обидеть паука  $Q$ . Аналогично доказывается, что у каждого паука не менее  $n - 2$  обидчиков.

Для доказательства утверждения достаточно показать, что если  $A$  и  $B$  – произвольная пара пауков, то первый из них обидел второго. Рассмотрим всех пауков, кроме этой пары. Из них паука  $A$  обидели хотя бы  $n - 3$  паука. Но и  $B$  обидел из них хотя бы  $n - 3$  пауков. При  $n \geq 5$  выполняется неравенство  $2(n - 3) > n - 2$ , поэтому найдется паук  $C$ , который обидел паука  $A$ , а его самого обидел паук  $B$ . Следовательно, паук  $A$  обидел паука  $B$ .

*Пример.* Если пауков было четыре (пусть их звали  $A, B, C, D$ ), то паук  $A$  мог обидеть  $B$  и  $C$ ,  $B$  – обидеть  $C$  и  $D$ ,  $C$  – обидеть  $D$  и  $A$ ,  $D$  – обидеть  $A$  и  $B$ . Если их было меньше, то можно взять часть данной схемы (пауков  $A, B, C$ , если их трое, и пауков  $A, B$ , если двое).

## 4. Права.

Обозначим номер квартиры Пети через  $N$ . Любое число  $x$  от 1 до 9 можно получить, используя не

более  $x + 1$  числа  $N$ :  $x = (N + N + \dots + N) : N$ . Число 10 можно получить, используя девять чисел  $N$ :  $10 = (N + N) : N \cdot (N + N + N + N + N) : N$ . Представим любое число от 1 до 2021 как  $\overline{abcd} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot a + 10 \cdot 10 \cdot b + 10 \cdot c + d$ . Цифра  $a$  не больше 2, остальные цифры любые. Значит, опираясь на разложение, такое число можно получить, используя не более  $9 \cdot 6 + 3 + 10 \cdot 3 = 87$  чисел  $N$ . Осталось разобраться с остальными числами. Два из них позволяют получить  $N - N = 0$ . Убрать все оставшиеся числа можно умножением их на этот 0.

*Замечание.* Если использовать не десятичную систему счисления, а троичную, причем симметричную, то можно получить любое натуральное число от 1 до 2021 из 44 одинаковых чисел. Для этого достаточно представить нужное число в виде

$$3^7 \cdot a + 3^6 \cdot b + 3^5 \cdot c + 3^4 \cdot d + 3^3 \cdot e + 3^2 \cdot f + 3 \cdot g + h = 3(3(3(3(3(3 \cdot a + b) + c) + d) + e) + f) + g + h,$$

где каждое из чисел  $a, b, c, d, e, f, g, h$  равно  $-1, 0$  или  $1$ . Чтобы получить каждую из семи троек, потребуется четыре числа  $N$ , а для каждой из восьми цифр нужно либо ни одного, либо два числа  $N$ . Таким образом, можно получить любое число от 1 до 2021, используя не более  $4 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 44$  чисел  $N$ . Если потребуются не все числа, то их останется четное количество, поэтому два из них, как и в решении выше, можно использовать для получения нуля.

5. При  $n = 4k + 1$  или  $n = 4k + 2$ , где  $k$  – натуральное число.

Масса всех гномов вместе равна  $\frac{n(n+1)}{2} + 3$  стоунов. Так как суммарная масса гномов на каждом рейсе является четным числом стоунов, то и сумма масс всех гномов должна быть четной.

Для этого число  $\frac{n(n+1)}{2}$  должно быть нечетным,

поэтому ни  $n$ , ни  $n + 1$  не должно быть кратно 4. Докажем, что для  $n > 2$ , дающих при делении на 4 остаток 1 или 2, все гномы смогут подняться на гору. Будем обозначать гномов их массами, между массами гномов, сидящих на разных скамьях, ставить знак равенства, а движение вверх и вниз обозначать знаками  $\uparrow$  и  $\downarrow$  соответственно. Покажем, как перевести наверх четырех гномов, имеющих массы  $m, m + 1, m + 2$  и  $m + 3$ :  $1 + 1 = 2 \uparrow$ ,  $1 = 1 \downarrow$ ,  $1 + 1 = 2 \uparrow$ ,  $1 = 1 \downarrow$ ,  $1 + (m + 2) = (m + 3) \uparrow$ ,  $2 = 2 \downarrow$ ,  $1 + m = (m + 1) \uparrow$ ,  $1 = 1 \downarrow$ . Применяв этот алгоритм несколько раз для четверок гномов с самыми большими массами, оставим для последних подъемов гномов массами 1, 2, 1 в случае,

когда  $n$  дает при делении на 4 остаток 1, или массами 1, 2, 1, 2, если  $n$  дает при делении на 4 остаток 2. Для завершения подъема в первом случае достаточно добавить первый шаг того же алгоритма (один гном массы 2 уже наверху), а во втором случае добавить первые три шага.

6. -4042 и 8084.

В соответствии с первым условием обозначим числа, написанные на заборе, через  $a-d$ ,  $a$  и  $a+d$ , где  $d \neq 0$ . Тогда без ограничения общности возможны два случая.

1)  $a^2 = (a-d)(a+d) \Leftrightarrow a^2 = a^2 - d^2 \Leftrightarrow d = 0$ , что противоречит условию.

2)  $(a-d)^2 = a(a+d) \Leftrightarrow d^2 = 3ad$ . Так как  $d \neq 0$ , то  $d = 3a$ . Таким образом, числа, написанные на заборе, имеют вид  $-2a$ ,  $a$  и  $4a$ . Поскольку число  $a$  целое, то  $-2a$  и  $4a$  – четные числа, поэтому  $a = 2021$ . Значит, два других числа равны -4042 и 8084.

7. Пусть биссектриса угла  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $F$ . Проведем через вершину  $D$  прямую, параллельную этой биссектрисе, которая пересечет прямую  $BC$  в точке  $E$  (рис.3). По-

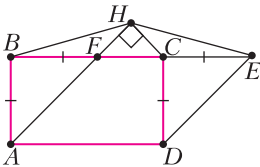


Рис. 3

скольку  $\angle CDE = \angle BAF = 45^\circ$ , то  $CE = CD = BA = BF$ , поэтому длина отрезка  $BE$  равна полупериметру прямоугольника.

Кроме того, так как  $\angle CFH = 45^\circ$ , то  $FH = CH$  и  $\angle BFH = \angle ECH$ . Следовательно, треугольники  $BFH$  и  $ECH$  равны по двум сторонам и углу между ними, откуда  $BH = EH$ . По неравенству треугольника для треугольника  $BHE$  получаем  $BH + EH > BE$ , т.е.  $BH > \frac{1}{2}BE$ , что и требовалось.

*Замечание.* Если  $AB > BC$ , то точка  $H$  лежит в другой полуплоскости относительно прямой  $BC$ , но рассуждения аналогичны.

8.  $m = n = 2$  или  $m = 2, n = 3$ .

Рассмотрим четыре возможных случая.

1) Если  $m = 1$ , то  $1 + n! = 1$ , чего быть не может.

2) Если  $m = 2$ , то  $2 = 2^n - n!$ . Тогда при  $n \geq 4$  решений нет, так как правая часть равенства делится на 4, а левая – нет. Если  $n = 1$ , то равенство неверно, а при  $n = 2$  или  $n = 3$  равенство верно. Отсюда получаем решения, указанные в ответе.

3) Если  $2 < m \leq n$ , то в левой части уравнения каждое слагаемое делится на  $m-1 > 1$ , а правая

часть и  $m-1$  – взаимно простые числа. В этом случае решений нет.

4) Если  $m > 2$  и  $m > n$ , то уравнение можно записать так:  $n!((n+1)(n+2)\dots m+1) = m^n$ . Тогда левая часть делится на  $(n+1)(n+2)\dots m+1 > 1$ , а правая часть взаимно проста с этим числом. В этом случае также решений нет.

9. 112,5°.

Пусть  $AD = 1$ , тогда  $AF = \sqrt{2} - 1$ . Если  $AG = x$ , то  $GF = GD = 1 - x$ , поскольку  $GH$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $FD$ . Из треугольника  $FAG$  по теореме Пифагора  $x^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = (1 - x)^2$ , откуда  $x = \sqrt{2} - 1$ . Это означает, что  $\angle AGF = 45^\circ$ ,  $\angle FGH = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$ . Из че-

тырехугольника  $ABHG$  получаем  $\angle BHG = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 112,5^\circ = 112,5^\circ$ .

10. *Первое решение.* Можно считать, что в наборе нет двух гирь одинаковой массы (в противном случае искомые наборы уже найдены). Пусть массы гирь равны  $m_1 < m_2 < \dots < m_{10} \leq 130$ , а  $s = m_3 + m_4 + \dots + m_{10}$ . Рассмотрим собственные подмножества, составленные из гирь набора; их количество равно  $2^{10} - 2 = 1022$ . Два самых легких набора имеют массы  $m_1$  и  $m_2$ , а два самых тяжелых  $s + m_1$  и  $s + m_2$ . На отрезке  $[m_2, s + m_1]$  имеется  $s + m_1 - m_2 + 1 \leq s \leq 123 + 124 + \dots + 130 = 1012$  целых чисел. С другой стороны, на этом отрезке находятся массы 1020 наборов, поэтому среди них найдутся два одинаковой массы. Если в этих наборах имеются общие гири, то их можно выкинуть из обоих наборов. При этом получившиеся наборы тоже будут иметь равные массы, т.е. они искомые.

*Второе решение.* Рассмотрим всевозможные непустые подмножества, содержащие не более шести гирь. Их количество равно  $C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 = 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 = 847$ . При этом суммарная масса каждого из этих подмножеств не превышает  $130 \cdot 6 = 780$ , поэтому среди них найдутся два подмножества с одинаковой суммой. Убрав из этих подмножеств общие элементы, получим два искомого набора гирь.

*Замечание.* Из второго решения видно, что условие можно усилить, заменив число 130, например, на 140.

11. 90°.

Опустим из точки  $P$  перпендикуляры  $PK$  и  $PL$  на стороны  $BC$  и  $CD$  соответственно (рис.4). Так как  $PKCL$  – квадрат, то  $PK = PL$ . Также  $\angle BPK = 90^\circ - \angle KPX = \angle XPL$ , поэтому прямоугольные треугольники  $PKB$  и  $PLX$  равны по катету и

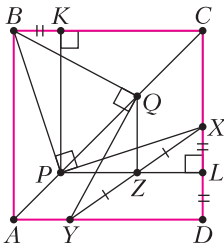


Рис. 4

острому углу. Следовательно,  $LX = KB = BC - KC = CD - CL = LD$ . Поскольку прямая  $PL$  параллельна  $AD$ , то она содержит среднюю линию треугольника  $XDY$ , т.е. проходит через точку  $Z$ . Аналогично, прямая  $QZ$  параллельна  $CD$ , откуда  $\angle PZQ = 90^\circ$ .

12.  $\frac{1}{6 \cdot 10^k}$ , где  $k$  – целое неотрицательное число.

Ясно, что все искомые числа меньше 1. Заметим также, что если  $x < 0,1$  – одно из искомых чисел, то требуемым условиям удовлетворяет и число  $10x$ . Поэтому будем искать число  $X$  вида  $\frac{A}{10} + r$ ,

где  $A$  – ненулевая цифра, а число  $r$  не превосходит  $0,0(9)$ . По условию имеем равенство  $10r = 4\left(\frac{A}{10} + r\right)$ , откуда  $r = \frac{A}{15}$  и видно, что цифра  $A$  может быть только единицей. Следовательно,

но,  $X = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ , а все искомые числа имеют вид  $\frac{X}{10^k}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

13. Не прав.

Из равностороннего треугольника со стороной 7 можно вырезать десять равносторонних треугольников со стороной 2 (рис.5). А из квадрата со стороной 7 нельзя вырезать более девяти квадратов со стороной 2. Действительно, при любом расположении квадрата со стороной 2 площадь его пересечения с закрашенной на рисунке 6 областью равна 1, а площадь всей закрашенной области равна 9.

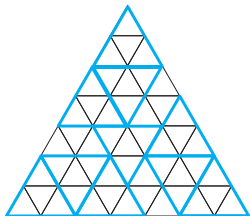


Рис. 5

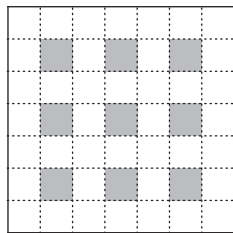


Рис. 6

14. Будем в дальнейшем использовать номера карточек, а не написанные на них числа (их Саша пока не знает). Если хоть одно из сравнений даст неравенство, то Саша сразу определит, что карточки лежат не по возрастанию написанных на них чисел.

Сначала Саша сравнивает наборы (1, 2, 3, 4, 5, 6) и (8, 9, 10). Минимальное произведение шести написанных на карточках чисел равно 720 и максимальное произведение трех написанных чисел тоже равно 720. Поэтому в случае равенства Саша поймет, что на карточках первого набора написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, второго – числа 8, 9, 10, а на отложенной карточке – число 7.

Следующие две проверки можно сделать по-разному.

*Первый способ.* Саша сравнивает наборы (1, 2, 3) и (6). Аналогично первой проверке, в случае равенства он сможет выделить тройку карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, две карточки с числами 4, 5 и карточку с числом 6. Обозначим наборы, в которых пока не определено, в каком порядке лежат карточки:  $A_1 = (1, 2, 3)$ ,  $A_2 = (4, 5)$ ,  $A_3 = (8, 9, 10)$ .

Далее Саша сравнивает наборы (2, 6, 10) и (3, 5, 8). Заметим, что при разложении всех чисел от 1 до 10 на простые множители число 2 встречается восемь раз, а число 3 – четыре раза.

Поэтому в случае равенства Саша поймет, что в первый набор из  $A_3$  попала карточка с числом 10. Действительно, если это карточка с числом 9, то в произведении этого набора число 3 встретилось уже три раза, что больше половины. А если это карточка с числом 8, то число 2 встретилось уже четыре раза, поэтому в другом наборе могут быть только оставшиеся четные числа 2, 4 и 10, но среди них нет числа, кратного 3. Тогда во втором наборе из  $A_2$  присутствует карточка с числом 5, чтобы была делимость на 5, а карточка с числом 4 отложена.

Далее получаем, что во второй набор из  $A_3$  попала карточка с числом 8, иначе это была бы карточка с числом 9, но тогда последняя карточка в первом наборе должна быть с числом 3, а во втором – с числом  $\frac{3 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 9} = 4$ , однако про нее мы уже выяснили, что она не участвовала в проверке. Значит, чтобы обеспечить делимость на 3, во втором наборе должна быть карточка с числом 3, а в первом наборе получаем карточку с числом  $\frac{3 \cdot 5 \cdot 8}{6 \cdot 10} = 2$ .

Соответственно карточки с числами 1 и 9 из наборов  $A_1$  и  $A_3$  в проверке не участвовали. Таким образом, Саша однозначно определит числа на всех карточках и убедится, что они лежат в порядке возрастания.

Соответственно карточки с числами 1 и 9 из наборов  $A_1$  и  $A_3$  в проверке не участвовали. Таким образом, Саша однозначно определит числа на всех карточках и убедится, что они лежат в порядке возрастания.

*Второй способ.* Обозначим  $B_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$  и  $B_2 = (8, 9, 10)$ . Саша сравнивает наборы  $(3, 5, 8)$  и  $(2, 6, 10)$ , а последнюю проверку делает для наборов  $(4, 5, 9)$  и  $(3, 6, 10)$ . Заметим, что обе последние проверки Саша помещал в каждый набор два числа из  $B_1$  и одно число из  $B_2$ . Докажем, что других таких же вариантов, дающих равенство произведений, нет.

Из  $B_2$  нельзя поместить в один набор число 8, а в другой 9, иначе в один набор с восьмеркой должны попасть числа 3 и 6, но тогда произведение двух чисел, которые в одном наборе с девятой, должно быть равно  $\frac{3 \cdot 6 \cdot 8}{9} = 16$ , однако произведение никаких двух чисел из  $B_1$  не равно 16.

Значит, из  $B_2$  в одном наборе должно быть число 10, обозначим этот набор  $C_1$ . Тогда в другой набор из  $B_1$  должно быть добавлено число 5, обозначим этот набор  $C_2$ . Если из  $B_2$  в  $C_2$  попало число 8, то произведение двух остальных чисел в  $C_1$  должно делиться на 4. При этом в нем не может быть числа 4, так как  $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$ , а тогда оставшиеся числа в  $C_1$  и  $C_2$  должны быть равны. Значит, из  $B_1$  в  $C_1$  могут попасть только числа 2 и 6, а последнее число в  $C_2$  равно  $\frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8} = 3$ .

Если же из  $B_2$  в  $C_2$  попало число 9, то остальные два числа в  $C_1$  могут быть равны только 3 и 6, а тогда последнее число в  $C_2$  равно  $\frac{3 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 9} = 4$ .

Таким образом, Саша может сразу определить карточку с числом 1 – только она не присутствовала из  $B_1$  в последних двух проверках, а также карточку с числом 10 – только она присутствовала из  $B_2$  в обеих проверках. После этого он может определить карточки с числами 3, 5 и 6 – они использовались в обеих проверках, при этом карточка с числом 3 сначала была не в той группе, где десятка, а потом в одной с ней группе, карточка с числом 5 – оба раза в другой группе, а карточка с числом 6 – оба раза в той же группе. Карточки с числами 2, 5, 8 и 9 присутствовали по одному разу в последних двух проверках, при этом уже можно однозначно определить, где какая из них.

**15.** 8 монет.

*Оценка.* При первой проверке может оказаться, что в каждой паре монеты имеют одну массу. Если какие-то из этих пар реvisor проверит повторно, то отложим их в сторону – их он точно не положит себе в карман. Каждую из оставшихся монет соединим ребрами с двумя монетами, с которыми она была в паре при первой и второй проверках. При этом образуется несколько циклов, в каждом из которых чередуются ребра,

соответствующие первой и второй проверкам, т.е. все циклы будут иметь четную длину. Будем раскладывать монеты по циклам последовательно: сначала по кругу заполним первый цикл, потом – второй и так далее, причем в каждом цикле первый переход будем делать по ребру, соответствующему первой проверке. Монеты тоже будем выкладывать по порядку: сначала все монеты первой массы, потом – второй, затем – третьей. Когда все циклы закончатся, оставшиеся монетами заполним отложенные пары. В полученной схеме реvisor заберет только те пары монет, которые попали в одном цикле на стык двух групп монет разной массы. Если в одном из циклов есть монеты всех трех масс, то всего есть три стыка и они находятся в этом цикле, т.е. реvisor положит в карман шесть монет. В противном случае стыки могут быть только между монетами первой и второй массы, а также второй и третьей, причем стыков каждого вида либо совсем нет, либо всего два. Значит, гарантированно более восьми монет реvisor забрать не сможет.

*Пример.* Реvisor может выложить все монеты в два круга по 150 монет и в каждом круге отметить по 75 монет через одну. При первой проверке он сравнивает каждую отмеченную монету с соседней справа. Если какие-то пары оказались разной массы, их реvisor забирает, а круги в этих местах смыкает. При второй проверке он сравнивает каждую оставшуюся отмеченную монету с соседней слева. Если после первой проверки реvisor забрал меньше восьми монет, то в каждом круге осталось более 100 монет и в нем есть монеты как минимум двух разных масс. Значит, в каждом круге есть не менее двух стыков между группами монет. При втором взвешивании реvisor проверит пары монет как раз на этих стыках, поэтому заберет не менее восьми монет.

**16.** В треугольнике  $A_0IC_0$  стороны  $A_0I$  и  $C_0I$  (рис.7) равны удвоенному радиусу вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $\angle A_0IC_0 = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$ . Следовательно, треугольник

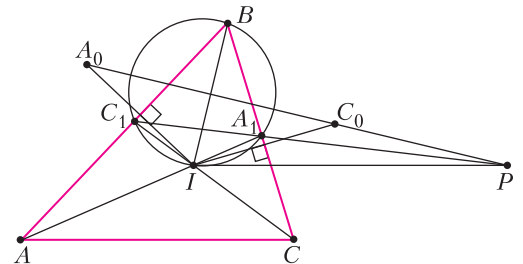


Рис. 7

$A_0IC_0$  равнобедренный с углом  $30^\circ$  при основании.  
 Четырехугольник  $A_1BC_1I$  вписанный, поскольку  $\angle A_1IC_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = 120^\circ$ . А так как  $\angle A_1BI = \angle C_1BI$ , то хорды  $A_1I$  и  $C_1I$  стягивают равные дуги, поэтому они равны. Значит, и треугольник  $A_1IC_1$  равнобедренный с углом  $30^\circ$  при основании.

Будем считать, что  $\angle BAC < \angle BCA$ , тогда указанные в условии точки расположены так, как показано на рисунке. Обозначим  $\angle A_1AB = \angle A_1AC = \alpha$ . Тогда  $\angle AA_1C = \angle ABA_1 + \angle A_1AB = 60^\circ + \alpha$  и  $\angle A_1C_0I = \angle A_1IC_0 = 90^\circ - (60^\circ + \alpha) = 30^\circ - \alpha$ .

Отрезок  $IP$  виден из точек  $A_1$  и  $C_0$  под углом  $150^\circ$ , поэтому четырехугольник  $IA_1C_0P$  является вписанным, откуда  $\angle A_1IP = \angle A_1C_0A_0 = \angle IC_0A_0 - \angle A_1C_0I = 30^\circ - (30^\circ - \alpha) = \alpha$ . Получаем, что соответственные углы  $A_1IP$  и  $A_1AC$  равны, поэтому прямые  $PI$  и  $AC$  параллельны.

**17.** Разобьем способы выбрать два множества с равными суммами из  $n$  чисел Фибоначчи на две части: не использующие  $n$ -е число и использующие его. Первая часть содержит  $K(n-1)$  способов. Заметим теперь, что для последовательности  $\{a_n\}$  Фибоначчи выполняется неравенство  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} = a_n - a_2 < a_n$ , следовательно, во всех способах второй части числа  $a_n$  и  $a_{n-1}$  находятся в разных множествах.

Способы, не использующие гирю  $a_{n-2}$ , можно получить так: взять способы, использующие  $a_{n-2}$  и некоторые из меньших гирь, заменить  $a_{n-2}$  на  $a_n$  и добавить  $a_{n-1}$  на другую чашу. Число таких способов равно  $K(n-2) - K(n-3)$ , так как это все способы, в которых используются какие-то гири из первых  $n-2$ , кроме тех, где не используется гиря  $a_{n-2}$ .

Если же гиря  $a_{n-2}$  используется, то она находится в одном множестве с  $a_{n-1}$  и число таких способов равно  $2K(n-3) + 1$ , так как их можно получить, либо взяв способы, использующие первые  $n-3$  гири, и добавив одно из множеств к гире  $a_n$ , а другое — к  $a_{n-1}$  и  $a_{n-2}$ , либо не добавляя к этим гирям ничего.

Таким образом,  $K(n) = K(n-1) + K(n-2) + K(n-3) + 1$ . Аналогично,  $K(n-1) = K(n-2) + K(n-3) + K(n-4) + 1$ . Из этих двух равенств следует искомое.

**ЕГЭ по физике**

**Ответы к заданиям 1–26**

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	2	14	8
2	6	15	2
3	12	16	34
4	10	17	13
5	14	18	32
6	32	19	147
7	41	20	1,5
8	405	21	21
9	40	22	3,20,1
10	60	23	25
11	45	24	134
12	21	25	16
13	к наблюдателю	26	19

**Возможные решения с развернутым ответом**

**27. 1)** Траектория протона будет отклоняться от первоначального направления вправо.

**2)** На протон действуют магнитное поле силой, равной по модулю  $F_m = qvB$ , и электрическое поле силой, равной по модулю  $F_3 = qE$  (рис.8).

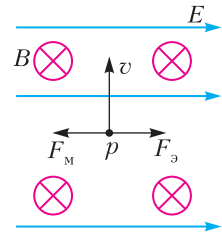


Рис. 8

Поскольку заряд протона положительный,  $\vec{F}_3$  сонаправлена с  $\vec{E}$ , а по правилу левой руки  $\vec{F}_m$  направлена противоположно силе  $\vec{F}_3$ . Так как первоначально протон двигался прямолинейно, то согласно второму закону Ньютона по модулю эти силы были равны.

**3)** Сила действия электрического поля не зависит от скорости протона, а сила действия магнитного поля с уменьшением его скорости уменьшается. Поскольку в результате уменьшения скорости протона равнодействующая сил  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_m$ , а также вызываемое ею ускорение направлены вправо, траектория протона будет отклоняться от первоначального направления вправо.

**28. 1)** Согласно законам равноускоренного прямолинейного движения,

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}, \tag{1}$$

$$3v_0 = v_0 + at, \quad (2)$$

где  $v_0$  – начальная скорость тела,  $a$  – модуль ускорения тела,  $s$  – путь, пройденный телом.

2) Решая уравнения (1) и (2), получим выражение для начальной скорости тела:

$$v_0 = \frac{s}{2t} = \frac{20}{2 \cdot 2} \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

**29.** 1) По закону Гука модуль силы упругости равен  $F = k\Delta l$ . Так как растяжения пружин одинаковы, то  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{k_2}{k_1} = 3$ , где  $F_1$ ,  $F_2$  – модули сил упругости левой и правой пружин соответственно.

2) Условия равновесия стержня с грузом имеют вид

$$F_1 + F_2 = Mg + mg,$$

$$F_1 \cdot \frac{L}{2} + mg \cdot \left(\frac{L}{2} - d\right) = F_2 \cdot \frac{L}{2},$$

где второе равенство – это правило моментов относительно оси  $O$ , проходящей через центр масс стержня перпендикулярно плоскости рисунка (рис.9).

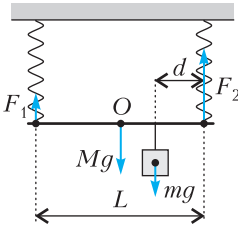


Рис. 9

3) Объединяя пункты 1 и 2, получаем систему уравнений

$$4F_1 = Mg + mg,$$

$$mg \cdot \left(\frac{L}{2} - d\right) = F_1 L.$$

4) Из системы уравнений пункта 3 находим

$$m = \frac{ML}{L - 4d} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,4 - 0,2} \text{ кг} = 4 \text{ кг}.$$

**30.** 1) Определим степень изотермического сжатия, при которой пар станет насыщенным, учитывая, что при  $100^\circ\text{C}$  давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению  $p_n = p_{\text{атм}} = 10^5$  Па. Для этого воспользуемся законом Бойля–Мариотта  $p_{\text{н1}}V_1 = p_{\text{н}}V_2$ . Поскольку начальная относительная влажность воздуха  $\phi = \frac{p_{\text{н1}}}{p_{\text{н}}} = 0,6$ , то

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_{\text{н}}}{p_{\text{н1}}} = \frac{p_{\text{н}}}{0,6p_{\text{н}}} = \frac{5}{3} < 2,5.$$

Следовательно, при изотермическом уменьшении объема в 2,5 раза пар станет насыщенным.

2) Определим начальное и конечное парциальные давления сухого воздуха, воспользовавшись законами Дальтона и Бойля–Мариотта:

$$p_{\text{в1}} = p_1 - p_{\text{н1}} = p_1 - \phi p_{\text{н}} =$$

$$= 10^5 \text{ Па} - 0,6 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$p_{\text{в2}} = \frac{p_{\text{в1}}V_1}{V_2} = 2,5 \cdot 0,4 \cdot 10^5 \text{ Па} = 10^5 \text{ Па}.$$

3) Определим конечное давление влажного воздуха в сосуде с помощью закона Дальтона:

$$p_2 = p_{\text{в2}} + p_{\text{н2}} = p_{\text{в2}} + p_{\text{н}} =$$

$$= 10^5 \text{ Па} + 10^5 \text{ Па} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

4) При нагревании влажного воздуха без изменения объема водяной пар будет оставаться ненасыщенным, а значит, влажный воздух можно считать идеальным газом с постоянным количеством вещества, для изохорного нагревания которого можно применить закон Шарля  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ . Таким образом, для того чтобы получить такое же конечное давление без изменения объема, температуру газа необходимо увеличить в

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ Па}}{10^5 \text{ Па}} = 2 \text{ раза}.$$

**31.** 1) При последовательном включении сила тока, протекающего по резистору и лампе, одна и та же, а напряжения на резисторе и лампе в сумме равны напряжению сети:  $U = U_R + U_L$ .

2) Напряжение на резисторе определяется законом Ома для участка цепи:  $U_R = IR$ .

3) Напряжение на лампе определяется по графику при силе тока  $I = 0,4$  А в цепи:  $U_L = 140$  В.

4) Мощность, выделяющаяся на резисторе, определяется законом Джоуля–Ленца:

$$P_R = U_R I = (U - U_L) I = 80 \cdot 0,4 \text{ Вт} = 32 \text{ Вт}.$$

**32.** 1) При взаимодействии излучения с пластинкой фотоны, проходящие через нее, не оказывают давления на пластинку.

2) Отраженные фотоны передают пластинке импульс, равный по модулю суммарному изменению импульсов всех отраженных фотонов:

$$|p_{\Sigma}| = |\Delta p| = |N(\bar{p}' - \bar{p})| = 2N \frac{h}{\lambda},$$

где  $\bar{p}' = -\bar{p}$ , ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}'$  – импульсы падающих и отраженных фотонов соответственно), а модуль импульса фотона равен  $p = \frac{h}{\lambda}$ .

Пусть  $N$  – число отраженных фотонов. Тогда  $N = \eta N_0$ , где  $\eta = 0,7$  – доля отраженных фотонов,  $N_0$  – число падающих фотонов.



В соответствии со вторым законом Ньютона сила, с которой излучение действует на пластинку за время  $t$ , равна  $F = \frac{|p_{\Sigma}|}{t}$ , а давление равно  $P = \frac{F}{S}$ , где  $S$  – площадь пластины.

Получим

$$P = \frac{2N_0\eta h}{St\lambda}. \quad (1)$$

3) Запишем выражение для числа фотонов, падающих на пластинку за время  $t$ . Учтем, что за время  $t$  фотоны, двигаясь со скоростью света, попадут на площадку  $S$  из цилиндра с основанием  $S$  и боковой образующей длиной  $ct$ . Объем этого цилиндра равен  $Sct$ . Поэтому

$$N_0 = nSct, \quad (2)$$

где  $n$  – концентрация фотонов в пучке,  $c$  – скорость света.

4) Решая уравнения (1) и (2), получим

$$n = \frac{P\lambda}{2\eta ch} = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 0,7 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34}} \text{ м}^{-3} = 5 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}.$$

## Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

### Профильный экзамен по физике Механика

1. Поскольку по условию размеры шайб малы по сравнению с длиной нити, можно считать, что в момент удара шайб о брусок их относительные скорости направлены перпендикулярно бруску и равны по модулю  $u$ . Скорости шайб в направлении движения бруска в момент их удара о брусок равны скорости бруска  $v$ . Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения бруска и закон сохранения механической энергии, считая, что кинетическая энергия вращения шайб пренебрежимо мала:

$$\begin{aligned} kmv_0 &= kmv + 2mv, \\ \frac{kmv_0^2}{2} &= \frac{kmv^2}{2} + 2 \frac{m(v^2 + u^2)}{2}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следуют такие равенства:

$$v = \frac{kv_0}{k+2}, \quad kv_0^2 = (k+2)v^2 + 2u^2.$$

Исключая отсюда  $v$ , получаем

$$u = v_0 \sqrt{\frac{k}{k+2}} \approx 1,4 \text{ м/с}.$$

2. После касания пружины доской пружина начнет сжиматься. При этом на доску в горизон-

тальном направлении будут действовать сила упругости со стороны пружины и сила трения со стороны бруска, а на брусок – сила трения о доску. Если брусок не скользит по доске, то ускорения этих тел одинаковы. По второму закону Ньютона,

$$Ma = F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}}, \quad ma = F_{\text{тр}},$$

причем

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{max}} = \mu N = \mu mg.$$

Поэтому максимально допустимое ускорение доски с бруском равно  $a_{\text{max}} = \mu g$ . Движение доски вместе с бруском до момента полного сжатия пружины описывается уравнением гармонических колебаний на первой четверти периода. Из этого уравнения следует, что амплитудное значение ускорения доски с бруском равно  $a_0 = v\omega$ ,

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$  – круговая частота свободных колебаний системы. Условие задачи будет выполнено, если  $a_0 \leq a_{\text{max}}$ . Следовательно,

$$m \geq \frac{kv^2}{(\mu g)^2} - M = 5 \text{ кг}.$$

### Молекулярная физика и термодинамика

1. Поскольку при температуре  $t = 100$  °С давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению  $p_0$ , из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что масса пара в исходном состоянии составляет

$$m_0 = \frac{p_0 MV}{RT} \approx 1,74 \text{ г}.$$

Масса пара, оставшегося после сжатия, равна

$$m_1 = m_0 - m = 0,74 \text{ г}.$$

Объем, занимаемый паром массой  $m_1$  при температуре  $t = 100$  °С, равен

$$V_1 = V - \frac{mRT}{p_0 M} \approx 1,28 \text{ л}.$$

2. При температуре 100 °С давление насыщенных паров воды равно нормальному атмосферному давлению  $p_0$ . Из уравнения Менделеева–Клапейрона  $p_0 V = \frac{m_1}{M_1} RT$ , где  $T = t + 273$ , следует, что объем, который занимал бы водяной пар, образовавшийся из данного количества воды, при давлении  $p_0$  равен

$$V = \frac{m_1}{M_1 p_0} RT \approx 3,4 \text{ л}.$$

Поэтому водяные пары будут насыщенными, даже если будут занимать весь объем цилиндра. Следовательно, в обеих частях цилиндра установит-

ся давление  $p_0$ . Объем, занимаемый азотом, равен

$$V_a = \frac{m_2}{M_2 p_0} RT.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{V_a}{V} = \frac{m_2 RT}{M_2 p_0 V} \cdot 100\% \approx 55\%.$$

### Электродинамика

1. Под действием постоянного электрического поля заряженный шарик летит по параболической траектории, а траектория незаряженного шарика представляет собой два прямолинейных отрезка равной длины. В направлении, параллельном пластинам, оба шарика летят с одинаковыми постоянными скоростями. Поскольку по условию шарика возвращаются в одну и ту же точку первой пластины, они затрачивают на движение одно и то же время. Обозначив через  $d$  расстояние между пластинами, находим, что время движения незаряженного шарика от одной пластины до другой равно

$$t_0 = \frac{d}{v_{0y}}, \text{ где } v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Такое же время заряженный шарик движется от момента вылета до вершины параболы. Модуль ускорения заряженного шарика равен

$$a = \frac{v_{0y}}{t_0} = \frac{v_{0y}^2}{d},$$

а его перемещение в направлении, перпендикулярном пластинам, за время  $t_0$  составляет

$$y_{\max} = v_{0y} t_0 - \frac{at_0^2}{2} = \frac{d}{2}.$$

Таким образом, заряженный шарик в направлении, перпендикулярном пластинам, долетает ровно до середины конденсатора. При этом он проходит разность потенциалов  $\Delta\varphi = \frac{U}{2}$ . Из закона сохранения механической энергии для заряженного шарика имеем

$$\frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Отсюда получаем

$$m = \frac{qU}{v_0^2 \sin^2 \alpha} = 1 \text{ мг}.$$

2. Пусть  $R$  – полное сопротивление контура, включающее в себя внутреннее сопротивление источника. Тогда выделяющаяся в контуре мощность при неизменном магнитном поле равна

$$N_1 = \frac{\varepsilon^2}{R}.$$

Когда магнитное поле начнет убывать, в контуре возникнет ЭДС индукции, по модулю равная

$$|\varepsilon_{\text{инд}}| = S \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| = kS.$$

Согласно правилу Ленца, индукционный ток направлен по часовой стрелке, следовательно, ЭДС индукции складывается с ЭДС источника. Мощность, выделяющаяся в контуре, станет равной

$$N_2 = \frac{(\varepsilon + kS)^2}{R}.$$

Искомая величина будет равна

$$n = \frac{N_2 - N_1}{N_1} \cdot 100\% = \frac{2Sk\varepsilon + (Sk)^2}{\varepsilon^2} \cdot 100\% = 21\%.$$

Мощность увеличится.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

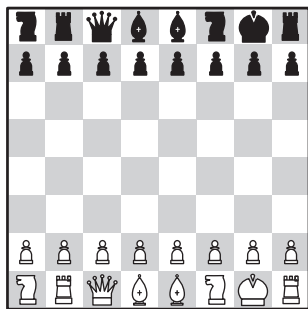
**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 216-40-40**

## Шахматы-960

В американском Сент-Луисе прошел ежегодный турнир на первенство мира по шахматам-960, более известным в России как шахматы Фишера. Именно одиннадцатый чемпион мира предложил видоизменить правила игры для борьбы с «ничейной смертью». Подробные правила можно найти в интернете, отметим лишь, что в этом виде шахмат возможны 960 начальных позиций, так что дебютная подготовка исчезает и остается чистое творчество. Победителем турнира, игравшегося с укороченным контролем, стал гроссмейстер Леньер Домингес.

**Ш.Мамедьяров – Л.Домингес**  
Сент-Луис, 2021

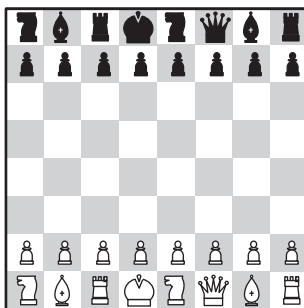


1. d4 d5 2. c4 c6 3. e3 a6 4. a3?! (точнее 4. a3 a6 5. cd a5, не уводя слона от короля) a6 5. aс2?! a4! Сделано всего 5 ходов, а у белых уже большие проблемы с пешками e2 и g2. 6. a2d2 dc 7. aс4 a4g4 8. g3?! Следовало «откупиться» пешкой: 8. a4e3 aе2 9. g3 a2d2 10. a2d2 afd5. Теперь белые попадают под мощную атаку. 8...aе2+! 9. a2g2 a2d5 10. f3 aef4+ 11. a2f2 ah3+ 12. e2e2 afd4+ 13. gf (на 13. aе3 к победе ведет 13...aе6 14. aе5 a2d5+ 15. aе2 f6) a2g2+ 14. a2d3 a2h1 15. a2e3 a2f3 16. a2g3 a2f4+ 17. a2f4 a2f4 18. a2f1 a2g5 19. aе5 e6 20. a2f2 0-0! (короткая рокировка происходит на королевской половине, здесь ладья про-

сто «перепрыгивает» через короля) 21. aе6 a2f6 22. a2g1 a2h4 23. a2g7 a2h8!, и белые вынуждены менять ферзей и пару ладей, после чего эндшпиль безнадежен, поэтому **белые сдались**.

Турнир примечателен также тем, что в нем принял участие тринадцатый чемпион мира Гарри Каспаров, занявший достойное 5 место и сыгравший ряд ярких партий.

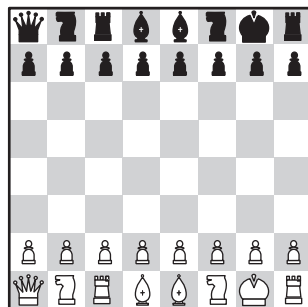
**Г.Каспаров – С.Шенкленд**  
Сент-Луис, 2021



1. d4 d5 2. f3 a2d6 3. c3 f5?! Черные придерживаются типичной для шахмат Фишера стратегии – не допускать активной игры соперника (e4), но 3...f6 выглядело аккуратнее. 4. a2d3 a2b6?! 5. a2b3 a2bc4?! Замысел черных непонятен, и на этом, и на предыдущем ходу перспективнее выглядело гибкое с6. 6. a2bc5 aе8 7. b3 aа3 8. aе3! 0-0-0 9. a2f2 a2b5?! 10. aе5. Черные неудачно разыграли дебют, а белые последовательно наращивают преимущество, играя по центру и ослабленным черным полям. 10...a2b1 11. a2b1 a2c4 12. a4 a2b6 13. 0-0. Белые добились стратегически выигранной позиции и готовят решающий пешечный штурм на ферзевом фланге. 13...a2e5 14. de a2c6 15. b4 a2f7 16. b5 a2g6 17. a2d3 a5 18. ba a2a6 19. a2c5 a2a8 20. a2b7 a2d7 21. a2c5 a2dd8 22. a2b4 a2a7 23. a2d3 a2e3 24. a2e3, и **черные сдались**.

Впечатляющую партию уже в первом туре сыграли два ведущих гроссмейстера.

**У.Со – М.Вашье-Лаграв**  
Сент-Луис, 2021



1. b4 d6. Возможно, лучше 1...a5!? в духе современной трактовки дебюта Сокольского. 2. c4 e5 3. d4 ed 4. a2d4 a2c6 5. a2b2 a2c6. Черные явно рискуют, оставляя ферзя на a8 вне игры. 6. a2e3 a2g5 7. a2d5! Чернопольный слон – главный защитник черных полей, поэтому белые готовы отдать за него ладью. 7...a2c1 8. a2c1 0-0 9. b5 a2cd8. Вероятно, черные рассчитывали на 10. a2e7+ a2h8 11. a2c8 a2c8, вводя ферзя в игру. 10. a2f6+! Еще одна позиционная жертва! 10...gf 11. a2h6. Грозит a2c2, a2c3 или даже h4 с последующим a2h3. 11...f5! 12. a2f6 a2g7 13. a2c3 a2de6 14. h4 a2b5! 15. h5 a2ce8! 16. h6 a2d8. Серией единственных ходов черные смогли остаться «в игре», однако их положение все еще очень опасно. 17. hg? Точнее 17. cb a2f6 18. a2f6, получая за ладью две легкие фигуры и сильную атаку. 17...a2f6 18. gf a2+ a2f8 19. a2f6 a2c4 20. a2c3 b5 21. a2h4 a2e6 22. a2d8 c5 23. a2b3 a2b3 24. ab b4 25. a2d5 a2g6 26. a2h3 a2e2 27. a2e3 a2d2? В цейтноте белые начали ошибаться: размен ладей после 27...a2e3 28. a2e3 a4 давал черным шансы на ничью и даже победу благодаря пешкам ферзевого фланга. 28. a2e8+ a2g7 29. a2f6+ a2h6 30. a2e3 f4 31. a2c4 a2d3 32. a2a8 f3? 33. g4 a2f4 34. a2g8 a2e6 35. a2e3, матовая сеть сплетена, поэтому **черные сдались**.

*А.Русанов*

Индекс 90964

# Через оконное стекло

Действительно ли мы видим мир за окном неискаженным?



*Игрушки с физикой*

ISSN 0130-2221 21009



9 770130 222214

(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 43 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)